Овде Наша каваљ. Школе Пријевр-
шна Госпоинова За време рата.
Здрав у Собин 8/8-45 те

24. Септембра. 1851.

Рід Ср III 281.1

Р II 533

ЕЛЕМЕНТАРНА

ГЕОМЕТРІЯ.

УСТРОЄНА

ЗА

УПОТРЕБЛЕНІЄ

СЛИШАТЕЛЯ ФІЛОСОФІЄ

У

ЛИЦЕУМУ КНЯЖЕСТВА СЕРБІЄ,

ОДЪ

АТАНАСІЯ НИКОЛИЋА,

Дипломатическогъ Землѣмѣра, редовногъ Професcора Математике,
Землѣмѣрия и Начертания и Сениора у истомъ заведенію.

У БѢОГРАДУ,

ПРИ ТИПОГРАФІИ КНЯЖЕСТВА СЕРБІЄ.

1841.

Инв. № 66755

НѢГОВОЙ СВѢТЛОСТИ

МИХАИЛУ М. ОБРЕНОВИЋУ,

КНЯЗУ СЕРБІЄ,

Милостивѣйшемъ Господару

СЪ НАЙДУБЉИМЪ СТРАХОПОЧИТАНІЄМЪ

посвећује

ИЗДАТЕЛЬ.

ВАША СВѢТЛОСТЬ,

МИЛОСТИВѢЙШИЙ ГОСПОДАРУ!

Щедра укрѣпленія, съ коима є СВѢТЛОСТЬ ВАША одма при почетку владѣтельства СВОГА при снисходителномъ посѣщенію овогъ школскогъ заведенія учећусе у истомъ младежь Србску къ прилѣжанію ободрити милостивѣйше благоизволила, побуђую у мени найнѣжнія чувства благодарности. Но чиме бы я болѣ благодарности знаке показати могао, него точнымъ испуняванѣмъ свете дужности мое, кое ВАША СВѢТЛОСТЬ, као покровитель высоки у отечеству Наука праведно одъ мене очекує. Да бы дакле я томъ очекиваню што совершеніе удовле-

творити, и Математіческе науке младежи Србской точніе предавати могао, поитіо самь ову Елементарну Геометрію по потребама и обстоятелствама овога школскогъ заведенія сочинити и издати.

Высочайша милость ова, съ коіомъ є **ВАША СВѢТЛОСТЬ** дозволити благоизволила, да я ову прву на нашемъ єзыку Геометрію **ВАШОЙ СВѢТЛОСТИ** посветити могу, служиће младежи Србской на пооштреніе и прилѣжаніе, а мени, као наставнику ньіовомъ на ободреніе точногъ испуняваня дужностій моій; а то ће быти средство, коимъ ће отечество къ пожеланой цѣли приспѣти. Благо отечеству! кое таковогъ Владѣтеля има, коій воспитаніе и наставленіе младежи отечественне, као најважніе и најтврђе народнѣ среће основе не само уважава, но и щедро укрѣплява, подпомаже, раз-

пространява, сва сходна средства къ болѣмъ и лакшемъ набавляню ньіовомъ подає, Бібліотеку заведенія умножава, художества подиже, и све што се благостоянія рода и отечества тиче, заводи, узвышава и награђуе само зато, да бы способне отечеству граћане умножіо.

За срећна дакле праведно цѣнимъ себе, што ме є провидѣніе такове славе удостоило, да я ову на нашемъ єзику прву Геометрію именомъ СВѢТЛОСТИ ВАШЕ украсити могу. Нека зна потомство, да О н о м е за добыть ове науке на матернѣмъ єзику благодарити има, подъ К о г ъ є покровителствомъ она тако свесрдно воздѣлавана была; нека зна садашньости и старо и младо, да за такова щедра Владѣтеля и любителя народнѣгъ просвештенія найискренніомъ подчинення любовію валя да непрестає Бога моли-

ти, да ГА као такова, здрава до найдублѣ старости СВОЄ, на утѣху, радость и іошть болю надежду цѣлогъ Србства, у изобилію обштегъ благостоянія славити може.

Подносећи ово дѣло, и препоручующисе высочайшой милости и благонаклоности Княжеской, остаємъ съ найдубльимъ страхопочитаніємъ

ВАШЕ СВѢТЛОСТИ

У Крагуєвцу,

1. Септемврія 1840.

покорнѣйшій слуга

Атанасій Николићъ.

ПРЕДГОВОРЪ.

ЛЮБЕЗНЫЙ ЧИТАТЕЛЮ!

Да бы се ова превиспренна наука што точніе у овомъ Княжества Сербіе школскомъ заведенію предавати могла, нуждно ми е было часъ пре такову кньигу за наставленіе сочинити, коя ће слушательима моима доста ясна и понятна, ньіовымъ предуготовленіяма соразмѣрна, а намѣри овога заведенія соотвѣтствующа быти; дакле по обстоятелствама овы' очекиваня, морао самъ међутымъ по могућству сила моій ова основанія Геометріе сочинити и издати.

При сочиненію овога дѣла моє є главно намѣренѣ было, да оно за моє слушателѣ што понятніе изиђе, а обширность морао самъ по обстоятелствама за предаванѣ прописаногъ (полгодишнѣгъ теченія) времена, наблюдавати, и у толико се у гдикоимъ предметима упуштати, колико є за совершено предаванѣ Физике и за практическо Землѣмѣріе нуждно. Далѣ по жельи Высокославногъ Попечител-

ства Просвѣщенія трудіо самъ се по возможности сила моій Математическа израженія и разна наименованія на Србски превести. По времену заръ ћу я, или другій кои болѣ и исправніе ову науку моћи издати, но мени ће а и свакомъ другомъ лакше одсадъ быти ову већъ постоећу и као прву на нашемъ матернѣмъ єзику дотеривати и поправляти, него изъ нова безъ свake помоћи ковати и склапати. Зато, пошто сваку ствaрь можемо добрымъ и злымъ очима гледати, и ты ово дѣло гледай са онымъ усердіемъ, съ коимъ самъ се я трудіо, да по могућству сила моій жельи Высокославногъ Попечителства Просвѣщенія, потребама овога Заведенія, и изображенію миле ми Србске младежи притечемъ и одговоримъ. Тако дакле маленкости Грамматическе (коє ми ніє посао) презирући, преводъ Математическы' израженія времену усовершенствованія ради оставляюћи, гледай изложенія и наставленія Математическа (као ствaрь), єсул' уредно, понятно, и цѣли сходно изложена, пакъ ћешъ ми труде моє оправдати.

У Крагуєвцу,

1. Септемврія 1840.

сочинитель.

СОДРЖАНІЄ.

Страна.

Уводъ съ разнымъ Землѣмѣрія изясненіяма и основателна правила . . . . . 1.

ОДДѢЛЕНІЄ ПРВО.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

ГЛАВА ПРВА. О свойствама лінія, и о свойствама правы' лінія у смотренію ньіовы' међусобны' положенія, и о угловима вообште. . . . . 8.

ГЛАВА ДРУГА. О свойствама правы' лінія къ окружію принадлежећима.. . . . . 51.

ГЛАВА ТРЕЋА. О мѣрама углова, коє праве лініє къ окружію принадлежеће причињаваю. . . . 40.

ГЛАВА ЧЕТВРТА. О свойствама окружія кругова међусобнима. . . . . 48.

ГЛАВА ПЕТА. О понятію полигона вообште, и о свойствама триуглова поособъ. . . . . 51.

ГЛАВА ШЕСТА. О свойствама тетрагона. . . . 66.

ГЛАВА СЕДМА. О свойствама полигона вообште осталы'. . . . . 72.

ГЛАВА ОСМА. О соразмѣрностима лінія. . . . . 80.

ГЛАВА ДЕВЕТА. О површинама. . . . . 99.

ГЛАВА ДЕСЕТА. О међусобнымъ површина отношеніяма. . . . . 114.

ОДДѢЛЕНІЄ ДРУГО.

ТРИГОНОМЕТРІЯ ПОВРШНА.

Страна.

О тригонометрическимъ лініяма (или дѣйствіяма). . 119.
I. О рачунаню Нѣдришта. . . . . 121.
II. „ „ Сонѣдришта. . . . . 123.
III. „ „ Дирке. . . . . 125.
IV. „ „ Судирке. . . . . 128.
V. „ „ Сѣчице. . . . . 130.
VI. „ „ Сусѣчице. . . . . 132.
О триуглима десноуголнымъ. . . . . 144.
Разрѣшеніє триугла равнокракогъ. . . . . 144.
Главна разрѣшенія триуглова. . . . . 145.
Употребленіє тригонометрическо-Логаритмическе таблице. . . . . 150.
Употребленіє Алгебре при траженю главны' тригонометрическій наставленія. . . . . 154.

ОДДѢЛЕНІЄ ТРЕЋЕ.

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

ГЛАВА ПРВА. О понятію, површинама и запремінама тѣла, као и. . . . . 168.
О рачунаню правилны' тѣла
I. Призма. . . . . 175.
II. Пирамида. . . . . 177.
III. Сфера или кругла. . . . . 182.
IV. Ошилякъ и нѣгова сѣченія. . . . . 190.
ГЛАВА ДРУГА. О међусобнымъ тѣла отношеніяма. 198.

УВОДЪ.

РАЗНА ИЗЯСНЕНІЯ ЗЕМЛѢМѢРІЯ И ОСНОВАТЕЛНА ПРАВИЛА.

1.

Геометрія, Землѣмѣріе (γεα земля, и μετρεω мѣримъ), зовесе наука, коя учи количества соединѣна непресѣчна мѣрити.

Слѣдство. Дакле она часть науке количества или Маѳематіке, коя просторна или соединѣна количества т. є. лініе, површности и тѣла испытуе, зовесе *Землѣмѣріе*, *Геометрія*.

2.

Землѣмѣріе се дѣли обично на *Планиметрію* (површно землѣмѣріе, т. є. мѣренѣ површности) и *Стереометрію* (мѣренѣ разны тѣла), и разумеваше подъ онымъ наука лінія и површностій, а подъ овымъ наука мѣреня тѣла.

Іоштъ се далѣ у предаваню додае къ првой науцы *Тригонометрія* (Триугломѣріе) *површна*, а къ другой *Тригонометрія шарна* (Тригонометрія

сферическа). И мы ћемо овде I. *Планиметрію* II. *Тригонометрію површну* и III. *Стереометрію* учити, а Тригонометрію сферическу, као за астрономе нуждну, због краткости у предаваню. прописаног времена изоставити.

3.

Неизмѣрима шупљина, коя нас и све ово што мы нашыма чувствама примѣчавамо, окружава, зовесе *просторъ*, (extensio). Просторъ се разширує на разна управленія или размѣре: у дужину, ширину, и у высину или дубљину; и то онъ є у свыма овыма трыма управленіяма *неограниченъ*. *И зато є просторъ єдно неограничено цѣло.*

4.

Свака є часть овогъ неограниченогъ простора *тѣло* (corpus). И оно се простире у ширину, дужину и высину, но є са свію страна ограничено. *Тѣло є дакле са свію страна ограниченый просторъ.* Части су тѣла опетъ тѣла. А оно ограничено мѣсто, коє нѣко тѣло у овомъ простору заузима, зовесе *запремина*, (volumen).

5.

Оно, што тѣло одъ прочегъ простора оддѣлює, или оно, гди тѣло нѣко престає, или на

кратко, граница тѣла зовесе *површность*, *површина* (superficies).

6.

Границе површности зовусе *лініє* (linea). Лінія се само по єдномъ управленію простире, т. є. само у дужину. Лінія као разширенѣ по *єдномъ* управленію помышлѣна, или є ограничена или неограничена. Части лініє опетъ су лініє.

7.

Граница лініє зовесе *точка* (punctum). Точка нема запремине, слѣдователно ни частій. Свака лінія има две граничне точке, *почетну* и *конечну точку*. Какогодь што се тѣло изъ површностій, а површность изъ лінія несостои, тако исто и лінія несостоисе изъ точкій; но у свакомъ тѣлу можемо површине, у свакой површини лініє, у свакой ліни точке узети, єръ можемо тѣла, површине, лініє свршаваюћесе помыслити, гди оћемо.

Точка є означеніе, коя частій и тѣла нема. Запремина Маѳематіческе точке равна є нулли, но за учинити ю за наша чувства примѣтителну, морамо се задовольити, да нѣно мѣсто на постояномъ предмѣту са видимымъ трагомъ назначимо, коя опетъ зато, што є видима, неће быти точка Маѳематіческа, али се за такову узети може, кадъ себи вообразимо, да се границе овога трага све выше и выше саужаваю, докъ не изчезну,

и у магновенію ньіовы изчезаваня право мѣсто Маѳематіческе точке у простору назначаваю.

Мы ћемо у напредакъ свагда Маѳематіческу точку разумѣвати.

8.

Да помыслимо да се єдна точка у простору *фіг.* 1. съ єдногъ мѣста *А* на друго *Б* (фіг. 1.) движе, и да трагъ по учинѣномъ путу после себе заоставля, трагъ се овай зове *Маѳематіческа лінія*. И будући да Маѳематіческа точка нити има мѣстишта, нити разшириие, зато *Маѳематіческа лінія ништа друго ніе, него движеніемъ єдне точке у простору написаный путъ.*

9.

Све што се простире, дакле изъ частій состои, или што се представити може, да се изъ частій состои, зовесе *количество*. Тѣла, површности и лініе су дакле количества, но точка ніе количесто. Ова тры просторна количества зовусе *соєдинѣна*, што су ньіове части точно соєдинѣне и скопчане, да се међу собомъ разликовати не могу.

10.

Соиоженый редъ при предаваню наука зовесе *начинъ*) *наставленія* methodus); а онай наста-

вленія начинъ, кои є при предаваню Маѳематіческиі наука заведенъ, и кои се употребляватиима, зовесе *Маѳематіческій начинъ предаваня* или *методъ Маѳематіческій* (methodus mathematica), кои ћемо и мы овде узети. А овай се меѳодъ состои изъ слѣдующи частій.

Изясненіе, описаніе (definitio) зовесе ясно и опредѣлено понятіе предмѣта съ речма изражено.

Основателна правила (axioma) єсу такова изреченія, коиі є истина тако ясна по себи, да противорѣчія нетрпи, слѣдователно потврженѣ изяснѣне истине тако є ясно, да никаквога доказателства нетреба. Н. п. цѣло є веће одъ своє части.

Наставленіе (theorema) зовесе оно изреченіе, коє се безъ доказателства узети не може. Но истина овога изреченія изъ основателныі правила изслѣдити и доказатисе има. Дакле *є наставленіе изслѣдованіе основателныі правила.*

Задатакъ (problema) зовесе оно изреченіе, коимъ се ише, да ее нешто изъ задатыі изнаћи, и таковогъ изнаћеногъ се точность доказати има. — Основателна правила и наставленія єсу ѳеоретіческа, а задатцы практическа изреченія, коя у Геометріи употребленіе леньира и шестара предпоставляю.

Доказателство (demonstratio) є союзъ више изреченія, коиі се точность на изясненіяма, на

основателнымъ правилама и већъ доказанымъ изреченіяма оснива.

Къ управленію Геометрически доказателства често нуждно є начертаніє лінія, фигура и тѣла, она посредствую доказателство, и зовусе *помоћне лініє*, *помоћне фіеуре* и проч., и дѣло ньіовогъ начертанія, зовесе *сочиненіє* (constructio).

Предпоставляня (hypotheses) зовусе она изреченія, при коима се у смотренію основателности доказателства и прочи истина равнодушно гледи, коимъ се начиномъ она опредѣлити имаю, и коя при доказателствама за основъ узетисе не могу.

Слѣдства (corollaria) содржаваю потврженія, кои точность изъ предидућій изреченія (изясненія, наставленія, задатка) лакимъ и понятнымъ начиномъ слѣдує.

II.

Основателна правила.

1. Свако є количество себи самомъ равно.
2. Цѣло є веће одъ сваке своє части, или свака є часть маня одъ свога цѣлогъ.
3. Цѣло є свыма своима частима совокупныма равно; и тако се могу свагда на мѣсто цѣлога све нѣгове части, а на мѣсто свію частій цѣло поставити. Дакле се равно на мѣсто равны поставити може.

4. Количества, коя су некомъ трећемъ и ономъ истомъ равна или подобна, она су и међу собомъ равна или подобна, т. є. єдно другомъ.

5. Коя су подобна некомъ трећемъ количеству, подобна су такођеръ и међу собомъ.

6. Ако су два количества међусобна равна, равне су и све части совокупне єднога количества свыма частима совокупныма другога количества.

7. Равна количества, къ равнымъ додата, одъ равны' отузета, са равныма умножена, чрезъ равна раздѣлѣна, даю равне сумме, разлике, производе, количнике.

8. Неравна, остаю неравна, ако се или собраніємъ увеличаю, или отятіємъ умале, или се умноже, или раздѣле.

9. Ако є одъ два количества єдно веће одъ другога, и нѣгова є пола већа одъ половине другога.

10. Количества, коя се єдно на друго положена слажу, и точно поклапаю, равна су у оныма, у коима се точно поклапаю.

11. Равна се у мѣсто равны' поставити могу.

ОДДЂЛЕНІЄ ПРВО.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

(Землѣмѣріє површно).

ГЛАВА ПРВА.

О СВОЙСТВАМА ЛІНІЯ, О СВОЙСТВАМА ПРАВЫ' ЛІНІЯ У СМОТРЕНІЮ НЬОВЫ' МЕЂУСОБНЫ' ПОЛОЖЕНІЯ, И О УГЛОВИМА ВООБШТЕ.

12.

Изясненіє. *Лінія* є количество, коя просторъ у дужину има. (§ 6.)

За означеніє лінія употребљюосе велика азбучна писмена, одъ кои' єдно се при почетку, а друго при свршетку нѣномъ поставля; а често гди се двоозначеніє избећи може, свободно намъ стои и са єднимъ назначити.

13.

Изяснен. *Права лінія* (linea recta) зове се она, коя све своє части у єдномъ управленію лежеће има, као фіг. 1. лінія *АБ*. *ф.* 1.

14.

Слѣдства. 1. Будући да се при правымъ лініяма са изятіемъ нѣне дужине, друго свойство, осимъ управленія њіовы изразити не може, слѣдує: *да су све праве лініе међусобно подобне.*

2. Праве лініе, кое су међусобно равне, слажу се.

3. Одъ єдне задате точке къ другой права се лінія повући може.

15.

Основат. правило. Међу две точке само є єдна єдина права возможна.

16.

Слѣдства. 1. Права лінія є найкраћій путъ међу две точке, а свака крива или скучена лінія међу исте две точке дужа є.

2. Две точке опредѣлюю станѣ, положеніе и управленіе праве лініе.

3. Ако се права лінія преко ове две точке не сматра да се далѣ продужує, то оне опредѣлюю не само нѣно *станѣ*, него и нѣну *величину*.

4. Права лінія точно изражава отстояніє међусобно две точке.

17.

Изяснен. Све оне лініє, коє нису праве, и одъ кои' поєдине части у ономъ истомъ управленію не стоє, зовусе *криве лініє*, фіг. 2. лінія *ГД*.

ф. 2.

Лінія, коя се состои изъ выше у разномъ управленію правы' лінія *АБ, БВ, ВГ, ГД, ДЕ*, фіг. 3. зовесе *скучена*.

ф. 3.

Она лінія, коя се изъ правы', и кривы' сожена состои, зовесе *мешавита лінія*, фіг. 4. *АБ, БВ, ВГ, ГД*.

ф. 4.

18.

Изяснен. *Лініє равнотекуће* (parallelae) зовусе оне, коє ма безконечно продужене у непремѣнномъ међусобномъ отстоянію теку, као у фіг. 5. *АБ* и *АВ*.

ф. 5.

Равнотекуће или равноотстоєће положеніє єдне лініє къ другой назначавасе са овымъ међу обема лініяма поставлѣнымъ знакомъ (#). Тако се зове у фіг. 5. *АБ* # *ВГ*, *АБ* равнотекућа са *ВГ*.

19.

Изяснен. Оне праве на єдной површини равной наодећесе лініє, коє нису равнотекуће,

кадъ бы се на обе стране продужиле, одъ оне стране одъ коє бы се саставляле, зову се *саставляюће се* (convergentes) и точка она, гди бы се ударише и пресекле, *точка пресецаня*; а одъ оне стране, одъ коє бы се све већма и већма разилазиле, *разставляюћесе лініе* (divergentes). Тако су у фіг. 6. лініе *АБ* и *ВГ* одъ *Х* саставляюћесе, ф. 6. и *Х* точка пресѣцаня, а одъ *К* разставляюћесе.

20.

Изяснен. *Окружна лінія* или *окружіе* (peripheria) фіг. 7. є єдна у себе саму повраћаюћа- ф. 7. се крива лінія, тога свойства, да све њене точке *АБВГА* одъ єдне унутри наодећесе точке *С* єднако отстоє. Ова важна унутри наодећасе точка *С* зовесе *средоточіе* (centrum).

Полупречникъ, *зрачацъ* (radius) зове се она, одъ ма коє точке окружія до средоточія, повучена права лінія. Тако су полупречници *АС*, *БС*, *ВС*, *ГС*.

Пречникъ или *преколѣрникъ* (diameter) зовесе свака чрезъ средоточіе повучена и одъ окружне лініе двапутъ ограничена права лінія, као *АВ*, *БГ*.

Тетивка (chorda) зовесе она одъ єдне точке окружне лініе до друге у ономъ истомъ окружію повучена права лінія. Тако є *АБ* тетивка.

Лукъ (arcus) зовесе свака часть окружне лініе. Тако є *АБ*, *БВ*, *ВГ*, *ГА*, лукъ окружія.

21.

Слѣд. 1. Сви су полупречницы єдногъ и оногъ истогъ окружія или лука међусобно равни.

2. Сви су пречници єдногъ и оногъ истогъ окружія међусобно равни; єръ свакій пречникъ состоисе изъ два полупречника, а ови су међу собомъ равни, дакле и они су равни.

22.

Изяснен. Окружна лінія дѣлисе на 360 равны' частій, коє *степене* (gradus) зовемо. Свакій степенъ опеть дѣлисе на 60 равны' частій, коє *мінуте*, а свака мінута опетъ на 60, коє *секунде* зовемо.

Дакле є лукъ одъ 90 степеній єдна четврть
„ „ „ „ 180. „ „ пола
„ „ „ „ 60. „ „ шест. часть
„ „ „ „ 45. „ „ осма „ } **окружне лініє**
и т. д.

23.

Слѣд. Ако є дакле число степеній, минута и проч. задато, то само треба намъ 360 чрезъ ово число задато раздѣлити, и сотымъ ћемо дознати, коя є часть окружне лініє задатый лукъ.

Степени се назначаваю са ^{0}, мінуте са $'$, а секунде са $''$. Као 24^{0}, $2'$, $5''$.

24.

Изяснен. *Површина* (superficies) є количество, коє се простире у дужину и ширину. Површине се дѣле на *равне* и *криве* површине.

Равна површина, или *равница* зовесе она површина, на коіой се на све стране само праве лініє помыслити и повуħи могу, *крива* на противъ, кадъ су лініє по ньой међу разныма точкама. криве, или по некимъ криве а по некимъ праве.

Само є єдна површность равна возможна, а безчисленне криве.

25.

Изяс. Површность или површина произлази, кадъ се єдна лінія попречно движе, и после себе некій трагъ заоставля. Ако права лінія започето движеніе постоянымъ управленіемъ своимъ задржи, то ħе она произвести *површность равну* или *праволінейну*; иначе *криву* или *криволінейну*.

Мавематіческа површина зовесе дакле у простору одъ лініє написаный путъ.

26.

Изясн. Нагибанѣ међусобно две праве лініє фіг. 8. *АБ* и *ВБ*, коє се у єдной точки *Б* удараю, састаю и пресѣцаю, зовесе *угалъ*, *кутъ* *ф.* 8.

(angulus). Нагибаюћесе лініе зовусе *краци*, *рашлѣ* (crura), а састанка, удараня и пресецаня точка зовесе *врѣ* или *ошилѣ угла* (vertex anguli).

За означеніе угла три су писмена нуждна, одъ кои' се свагда оно писмо у среди изговара, гди се угалъ наоди; дакле *АБВ*; или се само съ єднымъ писмомъ угалъ изговара н. п. угалъ *Б*, или угалъ *x*.

27.

Изясн. Величина угла зависи одъ нагибаня или одъ разширяваня кракова, а дужина кракова ма каква быти може. — Две праве лініе само се у єдной точки ударити и пресећи могу.

28.

Изясн. Кадъ се єданъ угалъ на другій та-
ф. 9. ко положи, да у Фіг. 9. угалъ *Е* на угалъ *Б*, и кракъ *ЕК* на кракъ *БВ* падне, то ће и другій кракъ *ЕД* на другій кракъ угла *Б* пасти, или не. Падне ли *ЕД* на *БА*, то се углови поклапаю, а § 11. число 10.; слѣдователно углови *АБВ* и *ДЕК* равни су. Ако представимо себи, да угалъ *ДЕК* положенъ на *АБВ*, овай угалъ не поклапа, но *ЕК* пада на *БВ*, а *ДЕ* да падне на *ГБ*, то и углови пошто се не поклапаю, не могу равни быти.

29.

Слѣдс. 1. Углови, кои се поклапаю, равни су.

2. Углови, кои су равни, мораю се и поклапати.

30.

Изясн. Кадъ се изъ ошиля угла *Б* фіг. 10. ф. 10. са повольнымъ одтваранѣмъ шестара *Бн* међу крацыма *АБ* и *БВ*, єданъ лукъ *но* напише, то ће число степеній, колико овай лукъ имао буде, быти *мѣра угла*.

Тако ће угалъ у толико већій или маньій быти, у колико овай повученый лукъ выше или манѣ степеній числіо буде.

31.

Изяснен. *Доугли* или *упоредни углови* (anguli contigui) зовусе они углови, кои обште ошилѣ и єданъ обштый кракъ имаю, и одъ кои оба друга крака у єдной правой лініи леже, као у фіг. 11. углови *м* и *н*. ф. 11.

Доугли или упоредни углови произлазе, кадъ се єдногъ угла н. п. *АДВ* кракъ *АД* продужи преко ошиля у ономъ истомъ управленію н. п. до *Б*.

32.

Изясн. Кадъ єдна права лінія на другу тако удара, да се ни на єдну, ни на другу страну

ненагиба, но доугле међусобно равне причинява, кажесе: ова лінія на ону стои *отвѣсно* (perpendi-
ф. 12. culariter). Тако є у фіг. 12. лінія *АБ* на *ВД* *отвѣсна*.

33.

Слѣд. Лінія отвѣсна са оном$ъ$, на кою она тако удара, причинява два равна, дакле десна угла. Одтудъ *десанъ* или *правъ* є угалъ *АБВ* съ єдне; а десанъ *АБД* и съ друге стране отвѣсне
ф. 12. *АБ* лініє фіг. 12. угалъ $м = н$.

За означеніе правогъ или десногъ угла употребляваћемо писмо Д; дакле $м = Д$, и $н = Д$, значи углови $м$ и $н$ десни су фіг. 12. И одтудъ десанъ угалъ онай є, кои є своме доуглу равань, или кои има за мѣру 90^{0}.

34.

Слѣд. 1. Ако єдна права лінія са другомъ сачинява десанъ угалъ, то є она на ову, а ова на ону отвѣсна.

2. Ако се отвѣсна *АБ* фіг. 13. по нѣномъ управленію и на противну праве лініє *ВГ* страну продужи, и продужена *БД* бы'ће такођеръ отвѣсна. Єръ по § 16. ч. 2. пошто две точке *А* и *Б* опредѣлюю станѣ, положеніе и управленіе праве лініє, то ако права *АБ* у отвѣсномъ управленію на *ВГ* буде, она ће и продужена у истомъ упра-

вленію своє положеніе задржати, али по предпоставляню права *АБ* на *ВГ* отвѣсно пада; дакле и продужена отвѣсна быти мора.

35.

Изяснен. Лінія, коя на другу праву тако удара, да она са надстояніємъ своимъ неєднаке упоредне углове причинява, кажесе: она стои *коссо* на ову, тако є у фіг. 11. линія *ВД* на *АБ* *косса*, што є угалъ $м > н$.

Они углови, кои су већи или маньи одъ 90^0, т. є. већи или маньи одъ Д, зовусе *косси углови* (anguli obliqui), и то они, кои су већи одъ Д, зовусе *туби* (тупи obtusi), а маньи одъ Д *оштри* (acuti) *углови*. Тако є у фіг. 11. угалъ *м* тубъ, ф. 11. а *н* оштаръ угалъ, єръ є угалъ $м > Д$, а $н < Д$.

36.

Изясн. *Очельни угли* (anguli verticales) зовусе они, кои ошиля своя у єдной и оной истой точки но тако противоположена имаю, да свакій кракъ єднога угла са єднымъ кракомъ другога угла у истомъ управленію лежи, као у фіг. 14. ф. 14. *м* и *н*, или *ю* и *я*.

Постанѣ очельны углова быва продуженіемъ кракова угла изъ точке удараня у истомъ правы лінія управленію.

ЛИБТЕКА

37.

Наставленіе. *Изъ єдне точке неке праве лініе, само се єдна отвѣсна подиђи може*, или изъ точке *Б* задате праве лініе *ВД* фіг. 12. само се єдна отвѣсна *АБ* подиђи може. ф. 12.

Доказат. Ако бы друга отвѣсна *БГ* іошт̀ъ возможна была, то бы и

угалъ *ГБД* = Д и
уґалъ *АБД* = Д.

Дакле бы по § 11. основ. прав. 4. и уг. *ГБД* = уг. *АБД*, коє є противу § 11. основ. прав. 2.; дакле.

38.

Слѣд. Какогодь што се изъ єдне точке неке праве лініе, само єдна отвѣсна подиђи може, тако исто изъ неке точке ванъ лініе наодѣесе, на ту исту праву лінію само се єдна єдина отвѣсна спустити може. Тако на задату праву *ВД* фіг. 15. изъ точке *А* само се єдна отвѣсна *АБ* спустити може. Єръ; да ставимо, да бы се осимъ отвѣсне лініе *АБ* іошт̀ъ єдна *КБ* на лінію *ВД* спустити могла, то бы по предидуђемъ доказателству невозможно было; ако бы се друга лінія отвѣсна *АН* осимъ лініе *АБ* наодила, то бы и угалъ *АНД* углу *АНВ* раванъ быти морао, коє є опетъ невозможно. Єръ, да представимо себи, да се угалъ *АНД* безъ промѣне разшири- ф. 15.

ваня кракова помакне, и да угалъ *АНД* раванъ буде углу *КБД*, то кадъ се угалъ *АНД* помакне и постави на угалъ *КБД*, лінія ће *АН* на лінію *КБ*, а угалъ *Н* на угалъ *Б* пасти и совершено се поклопити, и тако ће намъ опетъ невозможность друге лініе отвѣсне по предидућемъ доказателству слѣдовати.

39.

Наставл. *Кадъ є права лінія на другу праву отвѣсна, и кадъ има ма кою точку равноотстоєћу одъ две точке друге праве лініе, све ће точке оне отвѣсне лініе, одъ оне две точке друге праве лініе равно отстояти.* Или у фіг. 16. ако є права лінія *АБ* на праву *ВГ* отвѣсна, и ако има єдну точку *Б* равноотстоєћу одъ две точке *В* и *Г* праве *ВГ* т. є. тако да є $БГ = БВ$, то ће равноотстояти све точке ове отвѣсне лініе *АБ*, дакле и точка *А* и *Е* тако, да ће быти $АВ = АГ$, и $ЕВ = ЕГ$. *ф.* 16.

Доказат. Да представимо себи, да се угалъ *АБГ* око *АБ* као око своє осе преокрене докъ на угалъ *АБВ* себи раванъ (§ 33.) падне, обща точка *Б* собомъ самомъ соглашаваюћасе, пасти мора *Г* на *В* и онде ће се окончати (због $БВ = БГ$), и ону ће исту тамо точку съ ньомъ сочинявати, тако ће се поклопити и сложити такоћеръ *АВ* и *АГ*, и быће $АВ = АГ$, или $ЕВ = ЕГ$; дакле.

Да отстои друга ма коя точка *А* или *Е* одъ оне исте две точке *В* и *Г* равно тако, да буде $AB = A\Gamma$, или $EB = E\Gamma$; отстояће такођеръ равно *Б* одъ *В* и *Г*, т. є. быће $B\Gamma = BB$.

Доказ. Ако є $BB = B\Gamma$, то є и $AB = A\Gamma$, или $EB = E\Gamma$ по предидућемъ доказателству; дакле кадъ две точке опредѣлюю станѣ и положеніе праве лініе § 16. ч. 2., кадъ є $AB = A\Gamma$, или $EB = E\Gamma$, быће такођеръ и $BB = B\Gamma$.

40.

Наставл. *Права лінія стоећа на другой правой тако, да ма кое две нѣне точке равноотстое одъ две точке друге праве лініе, такова*

ф. 16. *є на ову отвѣсна.* **Или у фіг. 16. права лінія *АБ* стоећа на другой правой *ВГ* тако, да има две точке *А* и *Е* равноотстоеће одъ две точке *В* и *Г* друге праве лініе *ВГ*, такова є на ову отвѣсна.**

Доказ. Две точке опредѣлюю станѣ и положеніе праве лініе § 16. ч. 2., кадъ дакле *А* и *Е* (или *А* и *Б*) праве *АБ*, одъ две точке *В* и *Г* друге праве лініе равноотстое, све ће нѣне точке равноотстояти, и тако цѣла ће она лінія *АБ* на другу *ВГ* ударити, да се ни на єдну страну већма ненагиба, али такова є лінія по § 39. отвѣсна; дакле.

41.

Наставл. *Лінія отвѣсна найкраћа є права одъ свію изъ исте точке на исту праву повученыи.* **Или у фіг. 17. лінія отвѣсна** *АБ* **изъ точке** *А* **на праву** *ВД* **повучена, найкраћа є права лінія.** фіг. 17.

Доказ. **Да се продужи отвѣсна** *АБ* **на противну страну до** *Е* **тако, да буде** $БЕ = АБ$, **после да се союзи точка** *В* **са** *Е* **правомъ** *ВЕ*, **биће и** $ВЕ = ВА$. **Кадъ є права** *АЕ* **на** *ВД* **отвѣсна, и обратно є** *ВД* **на** *АЕ* **отвѣсна (§ 34.), и кадъ праве** *ВД* **точка** *Б* **равноотстои (по сочиненію) одъ** *А* **и** *Е*, **равноотстоиће такође** *В* **одъ** *А* **и** *Е* **(§ 39.), т. є. биће** $ВЕ = ВА$. **Кадъ то стои, то ће свака друга права** *АВ* **(или** *АК*, *АД* **и проч.), на исту праву** *ВД* **изъ точке** *А* **спуштена, дужа быти одъ отвѣсне** *АБ*. **Єръ** $АВ + ВЕ > АБ + БЕ$ **(єръ є она у смотренію ове крива лінія § 15 и 16.), дакле є и** $\frac{АВ + ВЕ}{2} > \frac{АБ + БЕ}{2}$ **(§ 11 ч. 7.), т. є. (кадъ є** $АВ = ВЕ$ **по доказателству, и** $АБ = БЕ$ **по сочиненію), дѣленѣ чрезъ 2 свршаваући, биће** $АВ > АБ$; **дакле є** *АБ* **найкраћа.**

42.

Слѣд. **Ако дакле нека лінія буде найкраћа одъ другиѝ правыѝ изъ исте точке и на исту праву повученыѝ, она ће быти отвѣсна. Одтудъ за**

меренѣ отстоянія єдне точке одъ праве лініє, право се употребльоє отвѣсна.

43.

Настав. *Упоредни угли равни су двома деснима, т. є. равнаюсе са два десна угла.* Или ф. 12. у фіг. 12. ако су углови *ВБГ* и *ГБД* упоредни, то су *ВБГ* и *ГБД* = 2Д.

Доказ. 1. Ако су упоредни угли равни, свакій є одъ ньи' раванъ єдномъ, оба дакле двома деснима. **2.** Ако су неравни, то се доказати дає, да єданъ одъ ньи' превозилази десанъ угалъ у толико, колико другоме до деснога оскудѣва, оба дакле равна су двома деснима. Ако представимо себи да є *АБ* на *ВД* у *Б* отвѣсна, то є

1) угалъ *ВБА* = Д,
и угалъ *АБД* = Д,
дакле *ВБА* + *АБД* = 2Д по § 11. ч. 7.

2) угалъ *ВБГ* = Д + *АБГ*
и угалъ *ГБД* = Д — *АБГ*
дакле *ВБГ* + *ГБД* = 2Д по § 11. ч. 7.

или

АБВ + *АБГ* + *ГБД* = 2Д по § 11. ч. 3.

44.

Слѣд. 1. Сумма дакле свію на єдной страни неке праве лежећи' углова, равна є двома деснима, или сви упоредни углови, кои на єдной

правой лініи бываю, равни су двома деснима или 180^{υ}.

2. Сви углови, кои у общой точки своя оштиля имаю, имаю за мѣру 4Д или 360^{υ}; єръ се изъ обще точке написати може окружіе.

45.

Наставл. *Угли очельни међусобно равни су*, или у фіг. 14. угаљ $м$ = углу $н$, као и $ф$. 14. $ю = я$;

Доказ. уг. $м = 2Д - я$
уг. $н = 2Д - я$
дакле $м = н$ по § 11. ч. 4.

или

$м + я = 2Д$
$н + я = 2Д$ § 43.
$м + я = н + я$. § 11. ч. 4.
$я = я$
$м = н$. § 11. ч. 7.

Равнымъ начиномъ можесе и за углове $ю$ и $я$ доказати.

46.

Слѣд. 1. Ако є єданъ одъ упоредны углова познатъ, изнаћи се може и другій самымъ одузиманѣмъ нѣгове мѣре одъ 180^{υ}. **2.** Ако єданъ одъ упоредны углова буде десанъ, то ће и другій быти десанъ. Ако єданъ одъ ньи буде оштаръ, другій мора быти тубъ: а ако єданъ буде тубъ, мора другій быти оштаръ.

47.

Задатакъ. *Изъ задате неке точке єдне праве лініе, подићи отвѣсну.* **Или у** *ф.* **18. фіг. 18. изъ задате праве лініе** *АБ*, **точке** *В* **подићи лінію отвѣсну.**

Разрѣшеніе. 1. Ставляюћи єданъ кракъ шестара у задату точку *В*, **другимъ кракомъ повольнымъ отваранѣмъ, да се забележе на задатой правой лініи две точке** *Г* **и** *Е*, **обе одъ задате точке** *В* **равноотстоєће. 2. Поставляюћи єданъ кракъ шестара у** *Г*, **отвореным шестаромъ выше одъ средине надъ лініомъ задатомъ назначивше лукъ, и тай истый лукъ изъ точке** *Е*, **пошто смо са онымъ истымъ отваранѣмъ шестара пресѣкли, добыћемо точку** *К*. **3. Пресецаня точку** *К* **союжаваюћи са задатомъ** *В*; **бы'ће** *КВ* **лінія отвѣсна.**

Доказат. Лінія права *КВ*, **на другу** *АБ* **тако удара, да нѣне точке** *К* **и** *В* **одъ две точке** *Г* **и** *Е* **друге праве** *АБ* **равноотстоє (као што є изъ сочиненія познато), али по § 40. такова є лінія отвѣсна; дакле.**

48.

Задатакъ. *Изъ задате ваня лініе праве* *ф.* **19.** *неке точке, спустити отвѣсну.* **Или у фіг. 19. изъ задате точке** *В* **на лінію** *АБ* **спустити отвѣсну.**

Разрѣшеніе. Изъ задате точке *В* пристойнымъ полупречникомъ да се напише лукъ *ГДЕ*, дату праву лінію *АБ* у точкама *Г* и *Е* пресецаюћій, после изъ исте две точке *Г* и *Е* но полупречникомъ маньимъ (или већимъ, него пре) да се назначе лукови кои ће се у *К* пресећи, ове две точке *В* и *Г* правомъ *ВК* союжаваюћи и продужуюћи до задате праве точке *Д*, ова ће иста *ВД* быти пожелана отвѣсна.

Доказат. Кадъ повучемо праве $ВГ = ВЕ$, и $КГ = КЕ$, као равне полупречнике (§ 21.), точке *В* и *К* праве *ВД* равноотстоє одъ *Г* и *Е* праве *АБ*, али по § 40. такова є отвѣсна; дакле.

49.

Задат. *Задату праву лінію другомъ правомъ отвѣсно и на двоє пресећи.* Или у фіг. 20. ф. 20. задату праву *АБ*, другомъ правомъ *ВГ* отвѣсно и на двоє пресећи тако да буде $АЕ = ЕБ$.

Разрѣшеніе. Изъ крайньи задате праве *АБ* точака *А* и *Б* као изъ средоточія са онымъ истымъ полупречникомъ $АВ = АГ = БВ = БГ$ да се забележе лукови пресецаюћисе у *В* и *Г*, ове точке пресецаня да се союзе правомъ *ВГ*; ова ће пресећи задату праву *АБ* у *Е* не само отвѣсно, него и на две равне части тако, да буде $ЕА = ЕБ$.

Доказат. Праве *ВГ* две точке *В* и *Г* равноотстоє одъ две точке *А* и *Б* задате праве

АБ збогъ єднаки' или равны' полупречника, равна отстоянія показиваюћи' (§ 21.), али по § 40. такова є отвѣсна; дакле права *ВГ* на задату є *АБ* отвѣсна, но права *ВГ* пресеца праву *АБ* у *Е* на две равне части тако, да є *ЕА* = *ЕБ* по § 39.; дакле права *ВГ* прописанымъ начиномъ повучена, сѣче дату праву *АБ* у *Е* отвѣсно, и на двое.

50.

Изясненіе. *Лініе равнотекуће* зовусе оне, коє (§ 18.) ма безконечно продужене, међусобно равно отстоє.

51.

Слѣд. 1. Све лініе отвѣсне, коє се међу двема равнотекућима налазе, равне су. Єръ овакове лініе отвѣсне изражаваю отстоянія точкій єдне лініе равнотекуће одъ друге (§ 42.), али сва су она отстоянія равна (§ 50.); дакле.

52.

Слѣд. 2. Ако дакле напротивъ две лініе отвѣсне, међу двема правима заваћене равне буду, оне ће лініе быти равнотекуће. **2.** Лініе равнотекуће нигди се саставити и ударити не могу, ма да се безконечно продуже.

53.

Изясненіе. Ако се две лініе равнотекуће ф. 21. *АБ* и *ВГ* фіг. 21. одъ неке праве *ДЕ* пресеку,

изродиће се четирь угла *внутрена*, и толико *споляшны*, разногъ наименованія (мы ћемо најупотребителніе овде навести): тако угалъ *н* зове се *споляшный*, а *х внутреный на єдной страни* (исто тако *м* и *о*): *ю* и *х* (или *я* и *о*) *два внутрена унакрстна: я* и *х* (или *ю* и *о*) *два внутрена на єдной страни.*

54.

Наставл. *Кадъ се лініе равнотекуће одъ неке праве пресецаю, онда є* (Фіг. 21.) 1) *Угалъ* ф. 21. *споляшный и внутренный на єдной страни међусобно, и* 2) *два угла внутрена унакрстна међусобно ревна су;* 3) *два внутрена на єдной страни равни су двома деснима или имаю за мѣру* 180°. Или у Фіг. 21. кадъ се две равнотекуће *АБ* и *ВГ* одъ неке праве *ДЕ* пресецаю, онда є 1) угалъ *н* споляшный = углу *х* внутреноме на єдной страни; 2) два угла внутрена унакрстна *ю* и *х* међусобно равни су: 3) два угла внутрена *я* и *х* на єдной страни равни су 2Д или 180°.

Доказат. 1. Да представимо, да се лінія права *ВГ* са угломъ *х* узъ пресѣчицу *ЕД* движеніємъ равнотекућимъ у положеніе *АБ* покрене, угалъ *х* поклопиће угалъ *н*, и съ њиме ће се сложити, као што є очевидно, а количества коя се слажу § 11. ч. 10; дакле $x = n$.

2. $н = ю$ по § 45., али
$н = х$ по предидућемъ доказателству;
дакле $ю = х$ по § 11. ч. 4.

3. Углови $н + я = 2Д$ по § 43;
али $н = х$ по овога § доказат. 1.
дакле $я + х = 2Д$ по § 11. ч. 11.

55.

Слѣдства. 1. Ако се дакле две праве трећомъ тако пресецаю, да є 1) угалъ споляшный и внутреный на єдной страни: или 2) да су два внутрена унакрстна међусобно равна; или 3) два внутрена на єдной страни да се равнаю са два десна, такове су лініе равнотекуће.

2. Лініе равнотекуће имаю равно нагибанѣ са лініомъ сѣчицомъ. Нагибанѣ ньіово изражаваю углови $н$ и $х$ (или $м$ и $о$ и проч.), али ови су по § 54. међусобно равни, одтудъ

3. Кадъ права нека буде на єдну одъ равнотекућій отвѣсна, она ће и на другу быти отвѣсна (§ 54. ч. 3.), и обратно ако єдна одъ равнотекућій на сѣчицу буде отвѣсна, быће и друга такођеръ отвѣсна.

ф. 5. 4. Међу двема равнотекућима (Фіг. 5.) $АБ$ и $ВГ$ све су отвѣсне $но$ и $яю$ (и проч.) равнотекуће. Єръ су углови внутрени међу двема равнотекућима равни двома деснима по § 33.

56.

Задатакъ. *На задату праву лінію, чрезъ назначену точку повући равнотекућу.* Или на задату праву лінію *АБ* фіг. 22. чрезъ назначену точку *В* повући равнотекућу *ВК*. ф. 22.

Разрѣш. 1. Изъ задате точке *В* да се спусти отвѣсна *ВД* на задату праву *АБ* (по § 48.), после изъ задате праве лініе *АБ* неке точке *Е* да се подигне отвѣсна *ЕК* (§ 47.), коя ће равна быти прећашньой *ВД*, затымъ да се повуче чрезъ назначену точку *В* и опредѣлену точку *К* права *ВК*; ова є пожелана равнотекућа.

Или 2. Спуштаюћи изъ задате точке *В* отвѣсну *ВД* на задату праву *АБ* (преко *В* къ *х* продужаваюћи ю), да се изъ исте точке *В* подигне отвѣсна *ВК*, ова є пожелана равнотекућа.

Доказат. 1. Лініе праве *ВД* и *КЕ* по преднаведеномъ разрѣшенію су на праву *АБ* отвѣсне и међусобно равне, али по § 52. такове су равнотекуће; дакле є права *ВК* на *АБ* равнотекућа.

Доказат. 2. Угли су *КВД* и *ЕДВ* десни (по § 33.), дакле заєдно $= 2Д$ или $= 180^0$ (§ 33.), али § 55. ч. 3; дакле.

57.

Слѣдство. Чрезъ задату точку на дату праву лінію само се єдна лінія равнотекућа по-

вући може. Да поставимо, да бы се една друга равнотекућа *Вн* повући могла, быле бы отвѣсне *Ен* и *ДВ* равне по § 51., али *ДВ* = *ЕК* (по сочиненію § 56. Разрѣш.); дакле бы была *Ен* = *ЕК* (по § 11. ч. 4.), коє є невозможно по § 11. ч. 2. и 3.

ГЛАВА ДРУГА.

О СВОЙСТВАМА ПРАВЫ' ЛІНІЯ КЪ ОКРУЖІЮ ПРИНАДЛЕЖЕЋИМЪ.

58.

Наставл. *Равне тетивке затежу равне луфк.* 24. *кове.* Или у фіг. 24. къ равнымъ тетивкама *АБ* и *БВ*, принадлеже и равни лукови *АБ* и *БВ*.

Доказат. По повученымъ полупречницыма *СА*, *СБ*, *СВ*, да се представи, да се кругоизсѣчникъ *БСВ* око *БС* преокрене и постави на кругоизсѣчникъ *БСА*, тетивке *БВ* и *БА*, као равне, совршено ће се сложити, слѣдовательно поклопиће се заєдно съ ньима и лукови *АБ* и *БВ* збогъ еднаке кривине (§ 20.), слѣдовательно по § 11. ч. 10. бы'ће равне. Одтудъ

59.

Слѣдства. 1. Обратно равни лукови затежу равне тетивке. Али

2. Тетивка већа затеже већій лукъ, маня маньій и обратно.

60.

Примѣчаніе. Изъ Наставленія § 58. слѣдує начинъ осимъ § 56. како се чрезъ задату ф. 23. точку *К* фіг. 23. равнотекућа на задату праву *БЛ* повући може. Изъ задате точке *К* полупречникомъ повольнымъ *КБ* да се назначи са шестаромъ лукъ неопредѣланъ *БГ*, кои ће дату праву *БЛ* негди у *Б* пресећи; изъ точке *Б*, са задржанымъ прећашньимъ полупречникомъ, да се напише лукъ *КЛ*; тетивка лука *КЛ* да се пренесе изъ точке *Б* на лукъ *БГ*, и точка *Г* да се споюзи са задатомъ *К* правомъ лініомъ *ГК*; ова ће быти пожелана равнотекућа на праву *БЛ*. Єръ по повученой правой *БК*, изродићесе углови *м* и *о* равни, збогъ *БГ* и *КЛ* равны' лукова, одъ равны' тетивака (по сочиненію) затегнуты' равны' § 30. 58., али § 55. ч. 2.; дакле.

61.

Изясніе. При окружію петорогубы' лінія можемо разликовати, то єсть: *зрачце* или *полупречнике*, *пречнике*, *тетивке*, *дирке* и *сѣчице*. *Зрачацъ*, *полупречникъ*, зовесе свака права лінія одъ средоточія окружія къ повольной точки нѣкой повучена; *Пречникъ* (діяметеръ) прекомѣрникъ, зовесе свака права лінія, коє крайнѣ

точке у окружію леже, и коя крозъ средоточіе прелази; *тетивка* є напротивъ свака права лінія, коє крайнѣ точке у окружной ліниі леже, но она крозъ средоточіе непрелази; *дирка*, додираюћа лінія, зовесе свака права лінія, коя ванъ окружія лежи тако, да она са окружнюмъ лініомъ само *єдну* точку обшту има, у коіой она окружіе исто додира; *сѣчица*, сѣчећа лінія, зовесе свака права лінія, коя окружіе у две точке сѣче.

62.

Слѣдства. 1) Полупречници, пречници и тетивке налазесе у окружію, дирке ванъ окружія, а сѣчице одъ части у окружію, а одъ части ванъ окружія. 2) Полупречници, пречници и тетивке су ограничене, дирке и сѣчице по себи неограничене лініе. 3) Ако се продужи полупречникъ одъ средоточія до окружія, добы'ће се пречникъ; ако се продужи тетивка или пречникъ на єдну или на обе стране повольно, добы'ћесе сѣчица. 4) Свако окружіе има безчислене полупречнике, кои су сви међусобомъ равни. 5) Свако окружіе има безчислене и међусобно равне пречнике.

63.

Наставл. *Равне тетивке равноотстоє одъ средоточія.* **Или у фіг. 24. равне тетивке** *АБ* **и** *БВ* **равноотстоє одъ средоточія окружія** *С*.

ф. 42.

Доказат. Равны тетивака *АБ* и *БВ* отстояніе одъ средоточія изражаваю отвѣсне лініе *нС* и *оС* по § 42. али ове су отвѣсне међусобно равне; єръ ако се кругоизсѣчникъ *БСВ* око *БС* као око осе преокрене, и положи на кругоизсѣчникъ *БСА*, збогъ $AC = CB$ (по § 62. ч. 4.), и збогъ $БВ = БА$ (по предпоставляню), точка *Б* собомъ ће се сама поклопити, а *В* паст'ће на *А* тако, да ће се обе тетивке поклопити, и тако єдну праву лінію сочинявати, а кадъ то буде, то и отвѣсна *Со* на отвѣсну *Сн* пасти мора, и єдну сочињаваюћи тако, да ће $Со = Сн$ быти; єръ бы се иначе изъ средоточія на исту тетивку две отвѣсне спустити могле, коє є (по § 38.) невозможно; дакле

64.

Слѣдства. 1. Маня тетивка већма, а већа тетивка манѣ отстои одъ средоточія. Єръ отстояніе веће тетивке *ДЕ* одъ средоточія *С* изражава *Сх*, а отстояніе манѣ тетивке *КГ* (на предидућу равнотекућа) изражава *Ся* (§ 42.), али є $Ся > Сх$ (§ 11. ч. 2.); дакле.

2. Пречникъ є дакле одъ свію тетивака највећій. Єръ онъ одъ средоточія ни мало неодстои.

65.

Наставл. *Лінія права пролазећа преко средоточія на тетивку отвѣсна, двопресѣца*

1) *исту ону тетивку*, 2) *лукъ одъ исте тетивке затегнутый, као и* 3) *угалъ на две равне части.*

ф. 25. Или у фіг. 25. лінія права CB пролазећа преко средоточія C, на тетивку $AБ$ отвѣсна, двопресѣца како 1) исту тетивку, да быва $Ax = xБ$, тако 2) лукъ $AВБ$ одъ исте тетивке затегнутый, да быва $AB = BБ$, тако и 3) угалъ $ACБ$ на две равне части, да угалъ $ACB =$ быва углу $BCБ$.

Доказателство. Овакове лініе отвѣсне CB точка C због $CA = CБ$ (§ 62. ч. 4.) равно отстои одъ крайньи тетивке $AБ$ точака A и $Б$, дакле и све нѣне точке, слѣдователно и x и B одъ исты A и $Б$ равно отстоє (§ 39.); дакле є 1) $xA = xБ$. 2) због равны точке B отстоянія BA и $BБ$, коє су заєдно и тетивке, лукъ є $BA =$ луку $BБ$ (§ 58.), и зато є 3) угалъ $ACB = BCБ$ (§ 30.).

66.

Слѣд. Ако напротивъ лінія права CB или Cx тетивку $AБ$ отвѣсно двопресѣца на $xA = xБ$, она 1) сѣче и лукъ $AВБ$ одъ исте тетивке придржаный (слѣдователно и угалъ $ACБ$), на две равне части, да є лукъ $BA = BБ$ због равны тетивака BA и $BБ$ (§ 58.), као равны исте лініе CB точака B одъ A и $Б$ отстоянія BA и $BБ$ (§ 39.): 2) пролази преко средоточія. Єръ ако она не бы пролазила преко средоточія, могла бы се двопресецанѣмъ лініе $AБ$ у точки x, преко

средоточія *н* (да буде средоточіе у *н*) друга лінія отвѣсна *хн* повући, коє є по § 37. невозможно, коє кадъ є невозможно, невозможно є и то, да лінія *Сх* или *СВ* тетивку *АБ* отвѣсно пресецаюћа, не преће преко средоточія.

67.

Наставл. *Тетивке равнотекуће завађаю равне лукове.* Или у фіг. 26. тетивке равноте- *ф* 26.
куће *АБ* и *ВД* завађаю равне лукове *АВ* и *БД*.

Доказат. По повученой преко средоточія *С* равнотекуће тетивке *АБ* и *ВД* отвѣсной лініи *ЕК* (§ 48.), ова ће двопресѣћи лукове *АКБ* и *ВКД*, одъ равнотекући тетивака завађене, или бы'ће

$$АВ + ВК = БД + ДК, \text{ и}$$
$$ВК = ДК \text{ по § 65.};$$

дакле $АВ = БД$ (одузиманѣмъ другога уравнія одъ првога.) Али $АВ = БД$, то су лукови одъ равнотекући тетивака завађени; дакле.

68.

Слѣд. И напротивъ, ако тетивке завађаю равне лукове, оне су равнотекуће.

69.

Наставл. *Полупречникъ на точку додирања дирке повученъ, стои на дирку отвѣсно.* Или

ф. 27. у фіг. 27. полупречникъ *СБ* на точку додираня *Б* повученъ, стои на дирку *ВД* отвѣсно.

Доказ. Пошто се само точка удараня *Б* дирке *ВД* у окружной лініи налази, а све нѣне друге точке ванъ окружія положене су (§ 61.), точке удараня одъ средоточія отстояніе, слѣдователно полупречникъ *СБ* (§ 16.) найкраћа е свію правы лінія, одъ средоточія С на дирку *ВД* (као преко окружія) повучены, али по § 42. такова е отвѣсна; дакле.

70.

Слѣд. 1. Ако дакле полупречникъ (окрайкомъ своимъ) каквой правой лініи отвѣсно надстояо буде, онъ ће быти дирка.

ф. 26. 2. Дирка *ГХ* фіг. 26. са тетивкомъ *ВД* равнотекућа (као две тетивке равнотекуће § 67.) заваћа равне лукове. Єръ полупречникъ *СК* не само е на дирку *ГХ* (§ 69.), него и на тетивку *ВД* отвѣсанъ по § 55. чис. 3.; дакле зрачацъ овде *СК* двопресѣца лукъ *ВКД*, слѣдователно е *ВК* = *КД* по § 65.

71.

Задатакъ. *Опредѣлити точку удараня дир-*

ф. 27. *ке.* Или у фіг. 27. Опредѣлити точку удараня *Б* дирке *ВД*.

Разрѣш. Да се спусти изъ средоточія *С* на дирку *ВД* отвѣсна *СБ* по § 48.

Доказ. Дирке точка *Б*, у коіой се она отвѣсна као зрачацъ окончава, точка є удараня по § 69.; дакле.

72.

Задатакъ. *Преко задате три точке неупоредно стоєће, повући окружіе круга.* Или у фіг. 28. преко задате три точке *А, Б, В* не упо- *ф.* 28.
редно стоєће, повући окружіе круга *АБВА*.

Разрѣш. Да се союзи єдна одъ задаты точака, *Б* са осталимъ двема *А* и *В* правымъ лініяма *БА* и *БВ;* праве ове зато, што оне три точке не леже у єдномъ управленію (по предпоставляню), међусобно нагибаћесе, и быће тетивке повући се имаюћегъ окружія (§ 20.). Тетивке ове *АБ* и *БВ* двопресѣцаюћи отвѣсно правима *ДС* и *ЕС* по § 49.; точка *С*, у коіой се двопресецаюће удараю, средоточіе є повућисе имаюћегъ окружія, у кои убадаюћи єданъ кракъ шестара, а другій отвараюћи ма до коє точке одъ задаты *А, Б, В*, и назначуюћи окружіе, то ће оно преко ове три точке прећи.

Доказ. Како *ДС* тако и *ЕС* пролази преко средоточія (§ 66.), дакле, кадъ се две праве лініе само у єдной точки ударити и пресѣћи могу по § 27., а окружіе само єдно средоточіе има, (§ 20.), то ясно слѣдує, да точка *С*, у коіой се ове отвѣсне пресецаю, мора быти средоточіе окружія.

73.

Слѣдства. 1. Ако дакле нека точка у кругу одъ три окружія точке равно отстояла буде, она ће быти средоточіе.

13. **2. Преко три точке** *В, Б, Г* **фіг. 13., у правой лініи налазећесе, окружіе круга повућисе неможе.**

3. Дакле лінія права не може се у три точке окружія наодити.

74.

Задатакъ. ***Непознато окружія или лука средоточіе изнаћи.*** **Или у фіг. 28. Окружія** *АБВА*, **или лука** *АБВ*, **средоточіе** *С* **изнаћи.**

ф. 28.

Разрѣш. Да се повуку тетивке *АБ* **и** *БВ*, **коє правима** *ДС* **и** *ЕС* **отвѣсно да се двопресѣку по § 49.; обща удараня пресецаюћисе лінія точка** *С*, **средоточіе є пожелано.**

Доказат. Доказателство є § 72.

75.

Задатакъ. ***Двопресѣћи окружія лукъ.*** **Или у фіг. 29. лукъ** *АГБ* **пресѣћи на двоє тако, да буде** $АГ = ГБ$.

ф. 29.

Разрѣш. Задатый лукъ *АГБ* **да се союзи тетивкомъ** *АБ*, **кою по § 49. отвѣсно и на двоє пресецаюћи правомъ** *ВГ*, **истомъ ће се правомъ**

двопресѣћи у *Г* и лукъ тако, да ће быти *АГ* = *ГБ*.

76.

Задатакъ. *Угалъ двопресѣћи.* Или у фіг. 30. угалъ *АСГ* двопресѣћи тако, да буде *АСВ* = *ВСБ*. ф. 30.

Разрѣш. Изъ вр'а или ошиља угла *С* међу крацыма нѣговима полупречникомъ поволь-нымъ *АС* да се напише лукъ *АВБ*, и овай лукъ надлежномъ тетивкомъ *АБ* да се затегне; после ова тетивка по § 49. правомъ *ЕС* да се отвѣсно двопресѣче; ова ће двопресѣћи и задатый угалъ *АСБ* тако, да є *АСВ* = *ВСБ*.

Доказат. Права *ЕС* двопресѣца лукъ *АВБ* на равне лукове *АВ* и *ВБ* по § 65., али су лукови *АВ* и *ВБ* мѣре углова противостоећи по § 30. и ове су равне; дакле и углови ньіови равни быти мораю; слѣдователно угалъ *АСВ* = углу *ВСБ*.

ГЛАВА ТРЕЋА.

О МЋРАМА УГЛОВА, КОЄ ПРАВЕ ЛІНІЄ КЪ ОКРУЖІЮ ПРИНАДЛЕЖЕЋЕ ПРИЧИНЯВАЮ.

77.

Изясненіє. Углови при окружію или су у окружію т. є. *внутрени*, или ванъ окружія т. є. *споляшньи*; оніи могу быти *средоточни* (у средоточію), или *окружни углови* (у окружной лініи). *Средоточный угалъ* зовесе онай угалъ у окружію, кои ошилѣ своє у средоточію има, а нѣговы крацы полупречници; *Окружный угалъ* зовесе онай угалъ, кои ошилѣ негди у окружной лініи има, а нѣгови су краци праве лініє у кругу; *споляшный* угалъ кодъ круга таковый є угалъ, кои ошилѣ ванъ круга има, а нѣгови су краци дирке или сѣчице.

78.

Наставл. *Угалъ, кои быва у точки додираня одъ дирке и тетивке, има за мѣру полу лука, одъ исте тетивке затегнутогъ.* Или угалъ ф. 31. *АБВ* у фіг. 31., кои быва одъ дирке *АБ* и тетивке *БВ* у точки додираня, има за мѣру полу лука *БЕВ* одъ исте тетивке затегнутогъ.

Доказат. Да бы ово доказати могли, треба повући 1) Пречникъ *ГХ* на тетивку *БВ* равнотекућій: 2) Пречникъ *ЕК* на исту тетивку *БВ*, а сотымъ и на равнотекућу *ГХ* отвѣсный (§ 55. ч. 3.): 3) полупречникъ *СБ* на точку додирања; бы̀ће углови *АБС* и *ЕСГ* десни (по § 33., 69.), слѣдователно равни, или $АБС = ЕСГ$, дакле и маньи углови у овима деснима угловима наодећисе равни су, или

$$АБВ + ВБС = ЕСБ + БСГ,$$

или угалъ $ВБС = БСГ$ по § 54. ч. 2.

дакле угалъ $АБВ = ЕСБ$ по § 11. ч. 7. отятіемъ, али угалъ *ЕСБ* има за мѣру лукъ *БЕ* по § 30., дакле и угалъ окружный *АБВ* има истый лукъ *БЕ* за мѣру, али $БЕ = ЕВ$, т. є. *БЕ* є половина лука *БЕВ*, одъ тетивке *БВ* затегнутогъ по § 65.; дакле.

79.

Слѣд. Као годь угалъ *АБВ* што има за мѣру полу лука *БЕВ*, тако и одъ противне стране ове тетивке *БВ* угалъ окружный *ВБД*, кои такођеръ быва одъ тетивке *БВ* и дирке *БД*, има за мѣру полу лука *ВХКГБ*.

80.

Наставл. *Угалъ окружный, кои быва одъ две тетивке, има за мѣру полу лука, коме онъ крацыма своима надстои.* Или у фіг. 32. угалъ ф. 32.

окружный *АБВ (ю)*, кои быва одъ две тетивке *АБ* и *БВ*, има за мѣру полу лука *АВ*, коме онъ крацима своима надстои.

Доказат. Доказателства овога ради да се повуче у помоћь дирка *ДЕ* по ошилю поменутога угла; отудъ изродившисе углови $x + ю + я$ имаю за мѣру полуокружіе или $\frac{1}{2}$ *БА* + $\frac{1}{2}$ *АВ* + $\frac{1}{2}$ *ВБ* по § 44. ч. 1., али x има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БА*, а равнымъ начиномъ и *я* има $\frac{1}{2}$ *БВ* по § 78.; дакле за *ю* остає $\frac{1}{2}$ *АВ*, коє се доказати имало.

81.

Слѣдства. 1. Угалъ средоточный *АСВ* двоянъ є угла *ю* (т. є. двапутъ толико великій) истоме луку надстоећегъ. Єръ угалъ средоточный *АСВ* има за мѣру цѣо лукъ *АВ* по § 30., а угалъ окружный *ю* има $\frac{1}{2}$ лука *АВ* по § 80.

ф. 33. 2. Угалъ окружный *АВБ* у фіг. 33., кои крацима своима *АВ* и *ВБ* пречнику *АБ* надстои, десанъ є. Єръ онъ има полуокружіе за мѣру одъ истогъ полупречника затегнуто, или 90° по § 80. и 21.

3. Сви углови окружни *о, ю, х* ошиля у окружію имаюћи, истоме луку надстоећи међусобно равни су, због єдне полу лука, одъ кракова њіовы' завађене, мѣре $\frac{1}{2}$ *ДАВБЕ*.

82.

Задатакъ. *Изъ крайнѣ точке задате праве линіе подићи отвѣсну.* **Или у фіг. 34. изъ задате линіе** *АБ*, **крайнѣ точке** *А* **подићи отвѣсну** *АВ*. ф. 34.

Разрѣш. Забадаюћи єданъ кракъ шестара у повольну точку *С* надъ датомъ правомъ лініомъ, а другій отвараюћи до задате крайнѣ точке *А*, и овымъ отваранѣмъ шестара *АС* да се напише лукъ *ВАД*, кои ће дату праву негди у *Д* пресѣћи. Ову точку пресецаня *Д* союжаваюћи са средоточіемъ *С* и продужуюћи докъ она написаный лукъ непресѣче у *В*, после исту пресецаня точку *В* са *А* правомъ *АВ* союжаваюћи; ова є *АВ* пожелана отвѣсна.

Доказат. Угалъ є *ВАД* десанъ, єръ онъ по § 81. ч. 2. пречнику надстои, али по § 34. ч. 1. ако єдна права лінія са другомъ сачинява десанъ угалъ, то є она на ову, а ова на ону отвѣсна; дакле.

83.

Задатакъ. *На задату точку окружну повући дирку* **или фіг. 35. да буде окружія** *ВАНВ* **задата точка** *А*, **на кою да се повуче дирка** *АБ*. ф. 35.

Разрѣш. Задата точка *А* да се союзи са средоточіемъ окружія *С* правомъ *АС*, кои ће быти зрачацъ истогъ окружія, затимъ изъ задате

точке *А* да се подигне отвѣсна *АБ* по § 82.; ова ће быти пожелана дирка.

Доказат. Доказателство є исто § 82.

84.

Слѣд. Преко задате у окружію точке *А* само се єдна дирка повући може. Єръ се само єдна изъ крайнѣ точке *А* праве лініє *АС* подићи може по § 37.

85.

Задат. *Изъ задате ванъ окружія точке, на окружіе повући дирку.* Или фіг. 35. на окружіе *АНВА* изъ задате точке *Б* повући дирку *БА*.

фіг. 35.

Разрѣш. Задата точка *Б* да се союзи са средоточіемъ окружія *С* правомъ *БС*, и изъ нѣне среднѣ точке *Д* полупречникомъ *ДБ* да се напише окружіе *БАСБ*, точка *А*, у коіой ново окружіе дато окружіе пресеца, да се союзи са задатомъ точкомъ *Б* правомъ *АБ*, ова ће быти пожелана дирка.

Доказат. Кадъ се повуче зрачацъ *АС*, *АБ* є збогъ десногъ угла *БАС* по § 81. ч. 2. отвѣсна лінія по § 34. ч. 1., слѣдовательно и дирка по § 70. ч. 1.

86.

Слѣд. Изъ задате ванъ окружія точке *Б* могу се две дирке повући, єдна изъ задате точке *Б* на *А*, а друга на *Н*. Єръ у двема овима точкама новоназначено окружіе *НБАСН* дато окружіе *АНВА* сѣче.

87.

Наставл. *Угалъ окружный, кои быва одъ тетивке и сѣчице, има за мѣру полусуммy лукова одъ тетивке и сѣчице придржаваны'.* Или фіг. 36. угалъ окружный *АБВ*, кои быва одъ тетивке *ВБ* и сѣчице *АД*, има за мѣру полусумму лукова *БВ* и *БД* одъ тетивке и сѣчице придржаваны', или $\frac{1}{2} БВ + \frac{1}{2} БД$. ф. 36.

Доказат. Углови $АБВ + ВБД$ као упоредни по § 43. имаю за мѣру 2Д или полуокружіе т. є. $\frac{1}{2} ВД + \frac{1}{2} ВБ + \frac{1}{2} БД$, али угалъ окружный *ВБД* по § 80. има за мѣру $\frac{1}{2} ВД$, дакле за угалъ *АБВ* остає $\frac{1}{2} БВ + \frac{1}{2} БД$, а то є оно, што се имало доказати.

88.

Наставл. *Угалъ внутреный, кое' се ошилѣ у кругу но ванъ средоточія нѣгова налази, има за мѣру полусуммy лукова одъ исты' страна и одъ продужены' кое оне у окружію завађаю.* Или фіг. 37. Угалъ внутреный *а*, ко- ф. 37.

єгъ се ошилѣ у кругу, но ванъ средоточія налази, има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БД* + $\frac{1}{2}$ *ЕК*.

Доказат. По продуженымъ странама угла *Ба* и *Да* до окружія, бы'ће оне *ДЕ* и *БК* тетиве, да се повуче тетивка *ЕГ* равнотекућа на *КБ*, бы'ће угалъ *ю* = углу *а* по § 54., али угалъ *ю* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *ГБ* + $\frac{1}{2}$ *БД* по § 80., дакле и угалъ *а* као нѣму раванъ има ту исту мѣру; али є лукъ *ГБ* = *ЕК* по § 67.; дакле равна на мѣсто равны' поставляюћи, угалъ *а* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БД* + $\frac{1}{2}$ *ЕК*.

89.

Наставл. *Угалъ споляшный, кои быва одъ две сѣчице, има за мѣру полуразлике лукова,* ф. 38. *кое обе оне у окружію завађаю.* Или фіг. 38. Угалъ споляшный *БАВ*, кои быва одъ две сѣчице, има за мѣру $\frac{1}{2}$ *ВГ* — $\frac{1}{2}$ *ДЕ*.

Доказат. Изъ *Е* да се повуче тетивка *ЕГ* равнотекућа на сѣчицу *АБ*; бы'ће угалъ окружный *ГЕВ* = углу *БАВ* споляшнѣмъ по § 55., али угалъ окружный *ГЕВ* по § 80. има за мѣру полу лука *ГВ;* дакле и угалъ споляшныї *БАВ* као нѣму раванъ, мора имати ту исту мѣру, али *ГВ* = *БВ* — *БГ* (као што є очевидно), а *БГ* = *ДЕ* по § 67. дакле равна на мѣсто равны' поставляюћи, т. є. на мѣсто *БГ*, *ДЕ*, угалъ споляшный *БАВ* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БВ* — $\frac{1}{2}$ *ДЕ*.

90.

Наставл. *Угалъ споляшньій* 1) *кои быва одъ сѣчице и дирке:* 2) *кои быва одъ две дирке, има за мѣру полуразлике лукова, на коима краци почиваю.* Или фіг. 39. 1) угалъ споляшньій *ВАБ*, кои быва одъ дирке *ВА* и сѣчице *АБ*; 2) угалъ *ГАВ*, кои быва одъ две дирке *ГА* и *АВ*, има за мѣру полуразлике лукова, на коима краци почиваю. ф. 39.

Доказат. 1. Угалъ споляшньій *БАВ*: овай има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БВ* — $\frac{1}{2}$ *ДВ*. Єръ, кадъ се дирка *АВ* продужи до *Е*, и изъ точке удараня кадъ се повуче тетивка *ВК* ⌗ *АБ*, бы'ће угалъ споляшньій *БАВ* = углу *КВЕ* окружноме по §. 54. слѣдователно имаће єдну мѣру $\frac{1}{2}$ *ВК*, кою има угалъ окружный *КВЕ* по § 78, али лукъ *ВК* = *ВБ* — *КБ*, као што є очевидно, а *КБ* = *ДВ* по § 67.; дакле угалъ споляшньій има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БВ* — $\frac{1}{2}$ *ДВ* (поставляюћи равна на мѣсто равны').

2. Угалъ споляшньій *ГАВ* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *ГБВ* — $\frac{1}{2}$ *ГДВ*. Єръ каогодь што угалъ *БАВ* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БВ* — $\frac{1}{2}$ *ДВ* (по доказателству), тако и угалъ *ГАБ*, кои такођеръ быва одъ дирке *ГА* и сѣчице *АБ*, има $\frac{1}{2}$ *ГБ* — $\frac{1}{2}$ *ГД*, дакле оба угла заєдно *БАВ* + *БАГ*, слѣдователно цео угалъ *ГАВ* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БВ* — $\frac{1}{2}$ *ДВ* + $\frac{1}{2}$ *ГБ* — $\frac{1}{2}$ *ГД*, или скраћиваюћи $\frac{1}{2}$ *БВ* + $\frac{1}{2}$ *ГБ* — $\frac{1}{2}$ *ДВ* — $\frac{1}{2}$ *ГД* = $\frac{1}{2}$ *ГБВ* — $\frac{1}{2}$ *ГДВ*.

91.

Слѣдство. Што годь далѣ ошилѣ угла одъ
ф. 40. лука или тетивке *АБ* фіг. 40. на коіой онай крацыма своима почива, отстои, сотымъ є све ный угалъ (да тако у безконечно малій отиђи може). Да буде средоточіе окружія у *С*, быће $\frac{1}{2}$ лука $АБ + \frac{1}{2} КДЕГ$ мѣра угла *ю* по § 88: лукъ *АБ* є мѣра угла *С* по § 30: лукъ $\frac{1}{2} АБ + \frac{1}{2} ДЕ$ угла *о* по § 88: лукъ $\frac{1}{2} АБ$ мѣра угла *я* по § 80: $\frac{1}{2} АБ - \frac{1}{2} ДЕ$ мѣра угла *х* по § 89. али $\frac{1}{2} АБ - \frac{1}{2} ДЕ < \frac{1}{2} АБ < \frac{1}{2} АБ + \frac{1}{2} ДЕ < АБ < \frac{1}{2} АБ + \frac{1}{2} КДЕГ$, као што є очевидно.

ГЛАВА ЧЕТВРТА.

О СВОЙСТВАМА ОКРУЖІЯ КРУГОВА МЕЂУСОБНЫМА.

92.

Изясненіе. *Окружія* кругова *сасредоточна* или *равнотекућа* зовусе она, коя обште средото-
ф. 41. чіе *С* фіг. 41. но разне полупречнике имаю. *Сю. Ся.*

93.

Наставл. *Ако се окружія кругова у три обште точке слажу, сложи ћесе у свима, и быће равна.*

Доказат. Ако се по општимъ точкама повуку тетивке, и ове се отвѣсно двопресѣку по § 49., окружія кругова имаће исто средоточіе и истый полупречникъ (§ 72. 73.), и тако бы̀ће равна.

94.

Слѣдства. 1. Окружія два круга дакле у три точке се пресећи не могу, єръ бы се точно поклопила.

2. Ако се два окружія *АяонА* (фіг. 41.) и *БонБ* сѣку, само ће се у две точке као *о* и *н* пресѣћи. фіг. 41.

3. Окружія два круга само се у єдной точки додирнути могу. Єръ у две точке се пресѣцаю, а у три слажу.

95.

Наставл. *Средоточія и точка додираня окружія два круга на истой површини додираюћисе леже у єдной правой лініи.*

Доказат. Да се додирну окружія два круга изнутра у *х* фіг. 42, ньіови полупречници *Сх* и *сх* на обшту точку повучени, настояће дирки отвѣсно по § 69; дакле кадъ се изъ исте точке неке праве лініє само єдна отвѣсна подићи може по § 37., полупречници, дакле и средоточія и точке додираня у истой правой лініи *Ссх* лежати мораю. фіг. 42.

Ако се додираю два окружія споля у x, лінія CxH, преко точке додираня x прелазећа, као изъ полупречника Cx и Hx, на обшту додираня точку x повучены' состоећисе, одъ свію є други лінія изъ C на H ванъ точке додираня повучены' найкраћа, єръ свака друга лінія као $CoюH$ осимъ два полупречника Co и $Hю$ (пређашньима равна по § 62. ч. 4.) содржава іошть празнину $oю$ међу окружіяма споля наодећусе, али є найкраћа свію лінія одъ точке до точке повучены, права по § 16.; дакле CxH лінія є права; дакле.

96.

Задатакъ. *Точку додираня окружія два круга на истой површини додираюћійсе опредѣлити.*

ф. 42. **Доказат.** Средоточія CH или Cc фіг. 42. додираюћійсе окружія союжаваюћи, точка она у окружію, преко коє права лінія прелази, точка є додираня. по § 95.

ГЛАВА ПЕТА.

О ПОНЯТІЮ ПОЛИГОНА ВООБШТЕ, И О СВОЙСТВАМА ТРИУГЛОВА ПООСОБЪ.

97.

Изясненіе. *Полигонъ* (πολυγωνον) *многоугольникъ*, или фігура *многострана*, вообште зовесе просторъ одъ правы' лінія заключеный. Исте оне праве лініе, кое међусобнымъ ударанѣмъ своимъ углове сачињаваю, и запремину заключаваю, зовусе стране полигона: а све заедно узете, у колико просторъ заключеный оне опредѣлюю, *периметаръ* (περιμετρος) *омѣріе*. Полигонъ по числу страна, и углова зовесе триуголный *тригонъ*, четвероуголный *тетрагонъ*, петоуголный *пентагонъ*, шестоуголный *ексагонъ* и проч. као што се изъ три, четирь, петь, шесть, и. т. д. страна, или углова состои.

98.

Изясненіе. Полигонъ *правиланъ* зовесе, кои све стране међусобно, као и све углове међусобно равне има, иначе *неправиланъ*.

99.

Изясн. **Полигона** *єдновидна* (ejusdem speciei) **она су, коя се изъ равногъ числа страна состоє: иначе су** *разновидна*.

100.

Изясн. ***Полигона подобна*** **зовусе она єдновидна полигона, коя углове соотвѣстственне међусобно (првый првомъ, другій другомъ, и т. д.) равне имаю.**

101.

Слѣд. **Сва полигона правилна єдновидна подобна су. Єръ су у овима сви углови међусобно равни, и соотвѣтственно равни.**

102.

Изясн. **Најпростіи полигонъ є просторъ са трима лініяма заключенъ (овде є речь о праволінейномъ), кои се поособъ** *тригонъ* **или** *тригольъ* (τριγονον) **зове. Кадъ представимо себи,** *ф.* **43. да триугалъ** *АБВ* **фіг. 43. єдной одъ страна свои надстои, т. є. на ньой почива, она страна** *БВ* **зове се** *основица* (basis): **остале две стране** *АБ* **и** *АВ краци*, **вр' угла** *А*, **основици противустоећій,** *триугла ошилѣ*: **лінія отвѣсна** *АД*, **изъ ошиля триугла на основицу спуштена,** *высина* **триугла (§ 42).**

103.

Изяснн. *Триугалъ* у смотренію страна зовесе *равностранъ*, (aequilaterum) кои се изъ страна међусобно равны' состои; *равнокракъ* (aequicrurum), кои има две стране равне; а триугалъ, кои све три стране неравне има, зовесе *неравностранъ* (scalenum). Триугалъ у смотренію углова, зовесе триугалъ *десноуголанъ* (rectangulum), кои има єданъ угалъ десанъ; угалъ десанъ сочињаюће стране зовусе *катети*, а десномъ углу противостоећа страна, зовесе *ипотенуза*; *тубоуголанъ* (obtusangulum), кои єданъ угалъ тубый; и триугалъ *оштроуголанъ* (acutangulum), кои углове оштре заключує. Последня два триугла іошть се именую *косоуголна*.*)

104.

Изяснен. Триугли (као вообште полигона), кои се само у смотренію ньове равне површине међусобно сматраю, чисто *равни* зовусе.

104.

Изяснен. Подобіе триуглова увиђавно є изъ § 100. вообште, поособъ пакъ *триугли по-*

---

*) Изясненія ради у фіг. 43. △ равнокракъ, видитисе може,
„ 44. △ равностранъ,
„ 47. △ неравностранъ,
„ 45. △ десноуголанъ,
„ 46. △ тубоуголанъ,
„ 43. △ косоуголанъ.

добни зовусе оніи, кои имаю сва три угла соотвѣтственно равна: то єсть првый првоме, другій другоме, а трећій угалъ трећемъ равна. *Супротне стране* међусобно у триуглима подобнима, као вообште у полигонима подобнима, оне су, ков угловима соотвѣтственно равнима противостов.

106.

Изяснен. Триугли *подобни* и *равни* зовусе оніи, кои и углове и стране соотвѣтственно равне имаю. А тако исто и сва полигона вообште. У таковомъ случаю кажесе, да се триугли или вообште полигона слажу.

107.

Наставл. I. *Два триугла слажусе, кадъ су две стране са обуваћенимъ угломъ међусобно равне.* Или у фіг. 48. кадъ є

$$\left.\begin{matrix} АБ = аб \\ БВ = бв \\ Б = б \end{matrix}\right\}, \text{ то є и } \triangle АБВ \cong \triangle абв.$$

ф. 48.

Доказат. Да представимо себи, да се $\triangle АБВ$ тако на $\triangle абв$ положи, да $Б$ на $б$, $БВ$ на $бв$ падне, то мора.

1. $В$ на $в$ пасти, збогъ $БВ = бв$, дакле $БВ \cong бв$ по § 11. ч. 10.

2. $БА$ на $ба$, збогъ $АБВ = абв$.

3. $А$ на $а$, збогъ $БА = ба$; дакле $БА \cong ба$.

4. Будући да *B* на *в*, а *A* на *а* пада, то є $AB \cong ав$; дакле $\triangle АБВ \cong \triangle абв$.

108.

Слѣд. Два триугла десноуголна слажусе, кадъ су оба катета међусобно равна.

109.

Наставл. *У равнокраком*ъ *триуглу, угли су на основицы наодећисе међусобно равни.* Или у фіг. 43. кадъ є $АБ = АВ$, то є и $АБВ = БВА$. ф. 43.

Доказат. Кадъ се изъ среднѣ точке *Д* неравне стране *БВ* на противоположеный угалъ *A* подигне отвѣсна *ДА*, она ће поделити цео триугалъ на два маня међусобно равна, т. є. на $\triangle ВДА$ и $\triangle БДА$. Єръ кадъ се $\triangle ВДА$ око стране *ДА* преокренути представи, и на $\triangle БДА$ положи, то ће се они због $БД = ДВ$, $АБ = АВ$ совршено сложити и поклопити по § 107., докле бы̀ће $\triangle АДВ \cong АДБ$, слѣдователно и соотвѣтственни угловы међусобно равни, дакле и угалъ $Б =$ уг. *B*.

110.

Слѣд. Триугалъ, кои два међусобно равна угла има, равнокракъ є, у таковомъ триуглу равнимъ угловима супротне су стране равне, и обратно. — Равностранъ триугалъ дакле заєдно є и равноуголанъ.

111.

Наставл. II. *Два триугла слажусе, кадъ су све три стране поособъ соотвѣтственне међусобно равне.* **Или** фіг. 48. **кадъ є** *АБ = аб, БВ = бв,* **и** *АВ = ав;* **то є** $\triangle$ *АБВ* $\cong$ $\triangle$ *абв.* ф. 48.

Доказат. Кадъ се $\triangle$ *абв* **на** $\triangle$ *АБВ* **по соотвѣтственнимъ странама єданъ на другій положи, т. є. страна** *аб* **на** *АБ,* **и страна** *бв* **на** *БВ,* **то и страна** *ва* **не може пасти на другу страну но управъ по страни** *ВА,* **и тако ће се све три стране совршено сложити и поклопити, али § 11. ч. 10; дакле.**

112.

Слѣд. Кадъ су у два триугла соотвѣтственне стране међусобно равне, и углови соотвѣтственни међусобно равни быти мораю.

113.

Наставл. III. *Два триугла слажусе, кадъ се у њима два угла са заваћеномъ страномъ међусобно равна налазе.* **Или** фіг. 48. **кадъ су углови** *б* **и** *в* **равни угловима** *Б* **и** *В,* **и кадъ є страна међу њима заваћена** *бв* **= страни** *БВ,* **то и** $\triangle$ *абв* $\cong$ $\triangle$ *АБВ.* ф. 48.

Доказат. Кадъ се $\triangle$ *абв* **по равной страни** *бв* **положи на** $\triangle$ *АБВ,* **страна ће** *бв* **положена на страну** *БВ* **као њой равна, ню совершено**

поклопити, угалъ *в* као углу *В* раванъ, пасти мора на угалъ *В* и нѣга совершено поклопити, а тако исто и угалъ *б* мора поклопити угалъ *Б*. Но кадъ по § 27. величина углова зависи одъ нагибаня или разширивaня кракова, и кадъ се две лініе само у єдной точки ударити и пресећи могу, то се и стране *ав* са *АВ* (због равногъ угла *в* и *В*), и *аб* са *АБ* (због равногъ угла *б* и *Б*) у точки *А* ударити и пресећи мораю; слѣдователно и угалъ *а* = углу *А*, али такови су триугли по § 106. подобни и равни; дакле △ *абв* ≅ △ *АБВ*.

114.

Наставл. *У сваком*ъ *триуглу сва три угла скупа равни су двома деснима*. Или у △ *АБВ* фіг. 49. сва три угла $А + Б + В$ имаю за мѣру 2Д, или 180°. ф. 49.

Доказат. Кадъ се опише △ *АБВ* окружіємъ (сматраюћи две стране као тетивке по § 72.), угалъ *А* имаће за мѣру $\frac{1}{2}$ лука *БВ* по § 80., угалъ *Б* има $\frac{1}{2}$ лука *АВ* (изъ истога узрока), угалъ *В* пакъ $\frac{1}{2}$ лука *АБ*;

Дакле сва три угла $А + Б + В$ имаю за мѣру $\frac{1}{2}$ *БВ* + $\frac{1}{2}$ *АВ* + $\frac{1}{2}$ *АБ* или полуокружіе; слѣдователно по § 22. 2Д, или 180°.

115.

Слѣдства. 1. У триуглу само єданъ десанъ или єданъ тубый угалъ быти може. Єръ бы иначе сва три угла выше имала одъ 180°.

2. Ако у каквомъ триуглу буде єданъ угалъ десанъ или тубъ, остали мораю быти оштри.

3. У триуглу десноуголномъ два угла оштра имаю скупа 90°.

4. Ако у триуглу десноуголномъ єданъ одъ оштры' углова познатъ буде, и другій се оштрый изнаћи може, мѣру познатогъ одъ 90° отузимаюћи. Одтудъ, ако єданъ одъ оштры' има 45°, толико ће имати и другій.

5. Ако у триуглу єданъ угалъ буде познатъ, отятіемъ овога мѣре одъ 180°, изнаћисе може сумма осталы' углова. И напротивъ.

6. Ако сумма два угла у некомъ триуглу позната буде, отятіемъ ньіове мѣре одъ 180° изнаћисе може трећій угалъ.

7. Ако су некога триугла два угла поособъ или скупа равни двома угловима поособъ или скупа другога триугла, и трећій угалъ трећемъ раванъ быти мора, и обратно.

116.

Наставл. *Ако се у некомъ триуглу изъ ошиля нѣговогъ на основицу спусти отвѣсна, и углови на основицы буду оштри, она отвѣсна мора пасти на основицу.* **Или у** ф. 43. **Фіг. 43. отвѣсна** *АД* **изъ ошиля** *А* **триугла** *АБВ* **на основицу спуштена мора пасти на основицу** *БВ.*

Доказат. Да предпоставимо, да она не пада на основицу триугла, но да пада ванъ нѣ

н. п. на точку *E*, было бы у триуглу *ABE* угалъ *E* десанъ § 33. а угалъ *ABE* тубый є (што є овога доугалъ по предпоставляню оштаръ), дакле бы у єдномъ и ономъ истомъ триуглу было єданъ десанъ, и єданъ тубъ угалъ, коє є по § 115. ч. 2. невозможно; дакле.

117.

Наставл. *Ако се у триугелу тубоугломъ изъ ошиља нѣговогъ на основицу спусти отвѣсна, она мора пасти ванъ основице.* Или у фіг. 46. *ф.* 46. отвѣсна *ВД* изъ ошиля *В* триугла *АБВ* на основицу спуштена, мора пасти ванъ основице *АБ*.

Доказат. Да представимо, да отвѣсна *ВД* не бы ванъ основице, но на основицу *АБ* н. п. на точку *E* пала, то бы у $\triangle$ *ABE* угалъ *E* десанъ было, а угалъ є на основици *A* тубъ, слѣдовало бы дакле, да у єдномъ и ономъ истомъ триуглу єданъ угалъ буде десанъ, и єданъ тубъ, коє є по § 115. ч. 2. невозможно; дакле.

118.

Наставл. *У сваком триугелу већем углу противостои већа, а манѣм маня страна;* и обратно. Или у $\triangle$ *АБВ* фіг. 49. већемъ углу *А* *ф.* 49. противостои већа страна *БВ*, а манѣмъ углу *В* маня страна *АБ*.

Доказат. 1. Предпоставляюћи да є угалъ $A > B$, бы'ће и нѣгова мѣра већа одъ мѣре ово-

га, или када се истый триугалъ опаше окружіемъ, быће $\frac{1}{2}$ лука *БВ* мѣра угла *А*, коя є $>$ $\frac{1}{2}$ лука *АБ* (§ 80.), дакле быће и цѣо лукъ *БВ* већій одъ лука *АБ* по § 11. ч. 9, али већій лукъ затеже већу тетивку, а маньій маню по § 59. чис. 2; дакле и тетивка, или већемъ углу *А* супротна страна *БВ* већа є одъ стране *АБ*.

2. Предпоставляюћи да є страна *БВ* $>$ стране *АБ*, быће и цѣо лукъ *БВ* $>$ лука *АБ*, по § 59.; дакле и $\frac{1}{2}$ лука *БВ* $>$ $\frac{1}{2}$ лука *АБ* (по § 11. ч. 9.), али є $\frac{1}{2}$ лука *БВ* мѣра угла *А*, и $\frac{1}{2}$ лука *АБ* мѣра угла *В*; дакле угалъ $A > B$; дакле.

119.

Слѣдства. 1. У свакомъ триуглу дакле равнымъ угловима противустоє равне стране, и обратно. Зато

2. Ако у триуглу два угла буду равна, триугалъ є равнокракъ по § 110.

3. Ако су у триуглу сва три угла међусобно равна, триугалъ є равностранъ, и свакій угалъ има за мѣру 60^{v}, и напротивъ у $\triangle$ равностраномъ сва три угла међусобно равна су.

4. Ако два триугла равнокрака єданъ угалъ раванъ буду имала, равна ће быти и остала два међусобно, дакле триугли быће подобни (§ 105). Єръ угалъ онай међусобно равный или се наоди међу двема равнима странама, или се єдной одъ овы' двею противуположенъ налази: у првомъ случаю онай само одузети валя одъ 180^{v}; оста-

ла два угла међусобно скупа и поособъ равна ће быти (по § 115. ч. 5, и 119 ч. 1): у другомъ случаю удвоєну њгову мђру одузети валя одъ 180°; (§ 119. ч. 1.); трећій раванъ ће быти трећемъ (по § 115. ч. 6).

5. Триугалъ равностранъ є триугалъ правиланъ. Єръ осимъ равны' страна и углови су у њму међусобно равни.

120.

Изясн. Ако се у △ *АБВ* фіг. 50. єдна страна *ВБ* продужи до *Д*, изродиће се ванъ триугла угалъ *АБД*, кои се у смотренію триугла *АБВ* зове *уголъ споляшньій*. ф. 50.

121.

Наставл. *Ако се у триуглу некомъ страна нека његова продужи, уголъ споляшньій ванъ є двома внутренима супротнима скупа узетима.* Или ако се у △ *АБВ* фіг. 50. страна *ВБ* продужи, угалъ споляшньій $АБД = А + В$. ф. 50.

Доказ. Угли $АБД + АБВ = 2Д$ по § 43;

али и угли $АБВ + А + В = 2Д$ по § 114.

дакле угли $АБД + АБВ = АБВ + А + В$ по § 11. ч. 4.

али угалъ $АБВ = АБВ$ по § 11. ч. 1.

дакле угалъ $АБД = А + В$ по § 11. ч. 7.

а то є оно што се има доказати.

122.

Наставл. *Ако се одъ два неравна но подобна триугла маньій на векій по соотвѣтственнимъ двема странама и по равномъ углу положи, трека страна бы'ке са трекомъ равнотеку-*
ф. 51. *ка.* Или фіг. 51. ако се △ *абв* на △ *АБВ* по равномъ углу *А* и *а* положи, трећа страна *бв* бы'ће са трећомъ *БВ* равнотекућа.

Доказат. Єръ ако се △ *абв* на △ *АБВ* положи, због подобности ньіове угалъ *абв* или *Абв*, као споляшньій, раванъ є углу *АБВ* као внутреномъ на єдной страни, али по § 55. таковe су лініе равнотекуће;

123.

Слѣд. Дакле и обратно; ако нека лінія *бв* тако сѣче две стране *АБ* и *АВ* єднога триугла *АБВ*, да є она ‖ на трећу страну *БВ*, два ће она триугла, коя се таковомъ лініомъ сѣчицомъ производе, быти подобна.

124.

Наставл. *Ако се у* △ *десноуголномъ изъ десногъ угла на ипотенузу спусти отвѣсна, она ће цѣо* △ *на два маня цѣломъ и себи подобна подѣлити.* Или ако се у △ десноуголномъ *АБВ*
ф. 52. фіг. 52. изъ десногъ угла *А* спусти отвѣсна *АД* на ипотенузу *БВ*, она ће подѣлити цѣо триугалъ на два маня, цѣломъ и себи подобна.

Доказат. Кадъ се спусти отвѣсна *АД* на ипотенузу *БВ*, она ће проузроковати

1. Два △ *АБВ* и *АБД* подобна због сва три угла соотвѣтственно равна (§ 105.). Єръ є уголъ *Б* обштій, слѣдователно рованъ, уголъ *Д* у манѣмъ триуглу због отвѣсне *АД* десанъ є, дакле рованъ углу *А* по предпостављаню опетъ десномъ у △ десноуголномъ *БАВ*, и трећій мора быти рованъ трећемъ по § 115. ч. 7.

2. Подобни су триугли *АБВ* и маньій *АДВ*: єръ є уголъ *Д* у маломъ триуглу због отвѣсне *АД* десанъ, слѣдователно рованъ десноме *А* у великомъ триуглу: уголъ *В* обштій є у оба триугла, и трећій уголъ рованъ є трећемъ.

3. Подобна су два триугла *АБД* и *АВД*, кое се такођеръ по предидућемъ начину због соотвѣтственны' равны' углова доказати може, или слѣдствомъ овога доказателства подъ

числомъ 1) △ *АБВ* ~ △ *АБД*, и по

числу 2) △ *АБВ* ~ △ *АВД*

дакле △ *АБД* ~ △ *АВД* по § 11. ч. 4.

125.

Задатакъ. *Задатый уголъ начертати*, или фіг. 53. задатый уголъ *БАВ* сочинити. ф. 53.

Разрѣш. Пошто смо праву лінію *ав* повукли, треба у задатомъ углу *БАВ* изъ ошиля угла *А* написати лукъ *БВ* полупречникомъ *АБ*, и овымъ истымъ отваранѣмъ шестара изъ крайнѣ

точке *а* повучене лініе *ав* пресецаюћи исту лінію написати лукъ *бв*, затимъ међу краке шестара узети тетивку *БВ*, и овомъ тетивкомъ пресћћи лукъ *бв* у *б*, точку *а* са *б* соединяваюћи, добићемо угалъ *бав*, кои ће задатомъ *БАВ* совршено раванъ быти.

Доказат. По повученимъ тетивкама *БВ* и *бв*, добыћемо два триугла *АБВ* и *абв*, у коима су и стране и углови међусобно равни, али по § 106. такови су триугли подобни и равни; дакле.

126.

Задатакъ. *Надъ задатомъ правомъ лініомъ АБ* фіг. 54. *сочинити* △ *АБВ равностранъ.*

ф. 54.

Разрѣш. Забадаюћи єданъ кракъ шестара у крайню точку *А* задате праве *АБ*, другій кракъ да се отвори до друге крайнѣ точке *Б* исте праве *АБ*, и са овимъ отваранћмъ шестара полупречникомъ *АБ* да се напишу надъ правомъ датомъ лініомъ изъ точке *А* и *Б* пресецаюћисе лукови, тако ћемо добыти точку *В*; ову *В* са точкомъ *А* и *Б* правима *ВА* и *ВБ* соединяваюћи, добићемо △ равностранъ.

Доказ. Задата страна $АБ = АВ = БВ$, єръ су то полупречници єдногъ и оногъ истогъ окружія, али таковый є △ по § 103. равностранъ; дакле.

127.

Задатакъ. *Сочинити триугаль равнокракъ* $ВДЕ$ фіг. 55. *кадъ є основица* $А$ *и єданъ кракъ* $Б$ *задатъ.* ф. 55.

Разрѣш. Повући треба праву лінію $ВД = А$, затимъ написати треба изъ $В$ полупречникомъ равнымъ $Б$ лукъ надъ истомъ повученомъ лініомъ $ВД$, и изъ точке $Д$ овай лукъ пресећи истымъ полупречникомъ $= Б$, точку пресецаня лукова $Е$ союзити правимъ лініяма $ЕВ$ и $ЕД$, тако ћемо добыти пожеланый $\triangle ЕВД$ равнокракъ.

Доказ. По сочиненію $ЕД = Б$, а и $ЕВ = Б$; слѣдователно $\triangle$ у коима су две стране равне, али таковый є по § 103. равнокракъ; дакле.

128.

Задат. *Задатоме* $АБВ$ *триуглу* фіг. 56. *другій* $абв$ *подобанъ и равань начертати.* ф. 56.

Разрѣш. Пошто смо праву $бв = БВ$ основицы повукли, треба међу краке шестара узети лінію $БА$, и сотимъ истимъ отваранѣмъ шестара изъ точке $б$ надъ лініомъ $бв$ назначити лукъ неопредѣленый, затымъ узети међу краке шестара лінію $АВ$ и изъ точке $в$ пре назначеный лукъ пресећи, тако ћемо добыти точку $а$, ову точку $а$ правима $аб$ и $ав$ са точкомъ $б$ и $в$ соединяваюћи, добыћемо $\triangle абв \cong \triangle АБВ$.

Доказ. Пошто су соотвѣтственне стране а и углови по сочиненію међусобно равни, ясно слѣдує, да су овакови △ подобни и равни.

ГЛАВА ШЕСТА.

О СВОЙСТВАМА ТЕТРАГОНА.

129.

Изясненіе. *Тетрагонъ*, иначе *четвороугольникъ*, или *фігура четворострана* зовесе одъ четиръ праве лініе заключеный просторъ (§ 97.).

130.

Изясненіе. 1. Тетрагонъ вообште на параллелограммъ и на трапезіюмъ право поделитисе може. *Параллелограммъ* є вообште такова фігура четворострана, у коіой су две и две су-
ф. 57. протне стране равнотекуће фіг. 57.

2. Параллелограммъ поособъ зовесе *квадратъ* (Геометрическій), у коме су све четири стране
ф. 58. фіг. 58. $АБ = БГ = ГВ = ВА$ међусобно равне, и сва четирь угла равна т. є. десна, слѣдователно кадъ є четвороуголникъ правиланъ (§ 98.).

3. Ако су сви углови равни дакле десни, но ако су стране две и две равнотекуће равне, зо-
ф. 57. весе параллелограммъ *десноугольанъ* као у фіг. 57.

4. *Ромбъ* є параллелограммъ, у коме су све четирь стране међусобно равне, но углови два и два супротна равна као у фіг. 59. ф. 59.

Ромбоідъ зовесе таковый параллелограммъ, у коме су две и две супротне стране равнотекуће равне, а тако два и два супротна угла равна, као у фіг. 60. ф. 60.

6. *Трапезій* вообште зовесе свака фігура четвороострана, у коме су две стране супротне равнотекуће (но и неравне быти могу), а остале две неравнотекуће, као у фіг. 61. ф. 61.

7. *Трапезоідъ* зовесе она четвороострана фігура, у коіой никакве стране равнотекуће неналазесе, као у фіг. 62. ф. 62.

131.

Изяснен. *Двоуголна* (diagonalis, діяґонолна *διαγωνιος*) зовесе она изъ єдногъ угла на другій супротный повучена права лінія, као *AB* у фіг. 57. Но (премда погрешно, али краткости ради) подъ унакрстномъ разумеваю сваку праву изъ єдногъ угла у каквомъ многоуголнику на другій противоположеный повучену, т. є. коя два угла соєдинява, и ньи дѣли на двоє. ф. 57.

132.

Наставл. *Сва четирь угла у сваком҃ъ тетрагону скупа имаю за мѣру* 4Д *или* 360°.

Или у фіг. 57. и 59. сва четирь угла $A + Б + В + Д$, скупа имаю за мѣру 4Д или 360°. ф. 57. 59.

Доказат. По повученой двоуголной *АВ* цео се параллелограммъ дѣли истомъ правомъ на два триугла · *АВБ* и *АВД*, у коима су свакомъ поособъ сва три угла = 2Д или 180° (§ 114.); дакле у оба триугла скупа или цѣломе тетрагону сва четирь угла имаю за мѣру два путъ толико, т. є. 4Д, или 360°.

133.

Слѣдства. Ако задата буду 1) єдна страна четвороуголника: 2) две додираюћесе стране параллелограмма десноуголногъ: 3) єдна страна са єднымъ угломъ ромба: 4) две додираюћесе стране рамбоіда са єднымъ угломъ или заваћенымъ или приключеныМъ, цео се тетрагонъ опредѣлити и сочинити може (§ 56.).

134.

Наставл. *Свакій се параллелограммъ дѣли двоуголномъ на два триугла АВБ и АВД*
ф. 57. фіг. 57. *међусобно подобна и равна.*

Доказат. Єръ пошто є страна *АБ* ∦ *ДВ*, угалъ $м = н$, и $х = о$ по § 54.; дакле триугли *АВБ* и *АВД* имаю два угла равна *м*, *н*, и *х*, *о* са заваћеномъ страномъ *АВ*, али такови су триугли по § 113. подобни и равни; дакле △ *АВБ* ≅ △ *АВД*, а то є оно што се доказати имало.

135.

Слѣдства. 1. У параллелограмму сваке су две стране супротне не само равнотекуће, него и равне. Єръ кадъ се $\triangle$ *АВД* помысли да се положи на $\triangle$ *ВАБ*, по соотвѣтственнимъ странама, слажусе стране како *БВ* и *ДА*, тако *АБ* и *ВД*.

2. Ако дакле у каквомъ тетрагону две супротне стране буду равне и равнотекуће, и остале ће две стране быти међусобно равне и равнотекуће, слѣдовательно таковый ће тетрагонъ быти параллелограммъ.

3. Две (или выше) лініе равнотекуће, одъ двею равнотекући заваћене, равне су, быле ове на оне отвѣсне или коссе.

4. Кадъ двоуголна дѣли параллелограммъ на два триугла подобна и равна (§ 134.) равне основе $АБ = ВД$ (по овога § ч. 1.), и равне высине $ВБ = АД$ са параллелограммомъ имаюће (по § 51., 102.), свакій се триугалъ сматрати може као половина параллелограмма єднаке основице и высине. Одтудъ

5. Два триугла подобна као половине два параллелограмма подобна право сматратисе могу.

136.

Задатакъ. ***Надъ задатомъ правомъ А***
фіг. 63. ***начертати квадратъ.*** **ф. 63.**

Разрѣшен. Начертати треба десанъ угалъ *БВД*, сочинити $ВК = ВЕ = А$, и повуѣи $КГ \# ВД$ и $ЕГ \# ВБ$, тако ѣемо пожеланый квадратъ *КВЕГ* добыти.

Доказател. Ова є фігура збогъ $ЕГ \# ВБ$ и $ВЕ \# КГ$ параллелограммъ, а збогъ $ВЕ = ЕГ = ГК = КВ = А$ равностранa фігура четвероуголна, и збогъ десногъ угла $КВЕ = ВЕГ = ЕГК = ГКВ$ квадратъ или тетрагонъ правиланъ (§ 130.), коє су свойства нѣгова.

137.

Задатакъ. *Начертати квадратъ, у коме є* ф. 64. *двоуголна задатой правой лініи А равна* Фіг. 64.

Разрѣш. Повуѣи треба праву *БК*, и изъ крайнѣ нѣне точке *Б* подиѣи отвѣсну *БН*, тако ѣемо добыти угалъ *НБК* десанъ; овай по § 30. двопресеѣи, точку пресецаня *Д* са *Б* соєдинявающи неопредѣленомъ дужиномъ правомъ *БД*; на ову праву пренети задату лінію двоуголну $А = БД$; изъ точке *Д* на повучену праву *БК* спустити отвѣсну (по § 48.) $ДВ = БВ$, коя ѣе быти иста $ДВ \# БН$; тако исто изъ точке *Д* повуѣи $ЕД \# БВ$, тако ѣемо добыти пожеланый квадратъ.

Доказат. Доказателство слѣдує изъ самогъ сочиненія.

138.

Задатакъ. *Начертати параллелограммъ* ***АБГВ*** *десноугланъ, кога ће две стране равне быти задатымъ двема странама* ***а*** *и* ***б*** Фіг. 65. *ф.* 65.

Разрѣш. Неопредѣлене дужине повући треба праву ***АД,*** и изъ крайнѣ точке ***А*** подићи отвѣсну ***АН,*** затимъ дату лінію ***а*** пренети на ***АД*** до ***АБ = а,*** а лінію ***б*** пренети на подигнуту отвѣсну тако да буде ***б = АВ;*** изъ точке ***В*** повући лінію ***ВГ ⌗ АБ,*** а изъ точке ***Б*** лінію ***БГ ⌗ АН,*** тако ћемо добыти квадратъ, кои ће пожеланимъ условіяма соотвѣтствовати.

Доказат. Доказателство є изъ сочиненія увиђавно.

139.

Задатакъ. *Начертати ромбъ, у коме бы стране задатой лініи* ***а,*** Фіг. 66. *равне быле.* *ф.* 66.

Разрѣш. Повући треба поволне дужине праву ***Вх,*** и на ню пренети задату праву ***а = ВД,*** подићи изъ поволне точке ове праве лініє н. п. изъ ***Д*** отвѣсну ***ДЕ = б,*** повући ***ФГ ⌗ Вх,*** написати изъ ***В*** са полупречникомъ ***А*** лукъ ***мн,*** коій ће праву ***ФГ*** у ***Н*** пресећи, и повући ***ДК ⌗ ВН,*** добыћемо пожеланый ***ВДКН*** ромбъ.

Доказ. Доказателство є изъ сочиненія увиђавно.

140.

Задатакъ. *Начертати ромбоидъ, у коме бы две разне стране двема задатима страната а и б, и одъ ньи заключеный угаль, задатомъ* ф. 67. *углу Д равань было,* фіг. 67.

Разрѣш. Начертати треба $\triangle$ *АДВ*, у коме бы обе задате праве двема странама т. є. *а* $=$ *ДВ*, а *б* $=$ *ДА* было, тако да угалъ *АДВ* $=$ углу *Д* буде, затимъ изъ овога триугла допунити валя параллелограммъ, тако ће ово пожеланый ромбоидъ быти.

Примѣчаніе. По основаніяма досадъ изложеныма моћиће ученикъ свакій задатакъ разрѣшити.

ГЛАВА СЕДМА.

О СВОЙСТВАМА ПОЛИГОНА ВООБШТЕ ОСТАЛЫ.

141.

ф. 68. Наставл. *Свакій се полигонъ АБВДЕ* фіг. 68. *може правымъ ліниями, изъ неке унутри наодећесе точке О къ сваком углу полигона повученимъ, на толико триугелова подѣлити, колико полигонъ страна има.*

Доказат. Доказателство є очевидно, кадъ се изброє како стране полигона, тако и триугли, на коє се по наставленію полигонъ дѣли.

142.

Наставл. *Сви углови свакога полигона имаю за мѣру толико пута* 2Д (*или* 180°), *колико у полигону страна има, манѣ* 4Д.

Доказат. Свакій се полигонъ може правима фіг. 68. изъ поволне неке унутрашнѣ точке къ свима угловима нѣговимъ повученымъ (§ 141.) на толико триуглова подѣлити, колико є у полигону страна, али свакога овога триугла сва три угла скупа имаю за мѣру 2Д по § 114.; дакле свію овы' триуглова угли скупа имаю за мѣру толико пута 2Д, колико є страна у полигону, али угли, кои се око унутрашнѣ поволне точке *о* наоде, непринадлеже къ угловима полигона (єръ се овога угли при омѣрію налазе); дакле овы мѣра (по § 44. ч. 2.) 4Д одъ мѣре свію углова одузетисе мора, да бы се мѣра свію углова полигона придобити могла; дакле. фф. 68.

143.

Слѣд. Ако бы дакле имали полигонъ правиланъ (у коме су сви углови међусобно равни) и хотели бы знати обштій угалъ нѣговъ, то треба сумму степена свію углова нѣговы' раздѣлити чрезъ число углова или страна нѣговы' (§ 23).

144.

Наставл. *У полигону правцлномъ наодисе точка, коя одъ ошиля свію углова полигона* **ф. 69.** *равноотстои.* **Или у фіг. 69. точка** *С* **равноотстои одъ ошиля свію углова** *АБВДЕК.*

Доказат. Да се двопресѣку (§ 76.) два найближа угла *А* и *Б* полигона правима *АС* и *БС*; точка *С*, у коіой се лініе, углове двопресецаюће, пресецаю, точка є пожелана. Єръ кадъ се изъ пресецаня точке *С* на све углове полигона повуку праве *СВ, СД, СЕ, СК,* оне, као отстояніе точке *С* одъ ошиля углова по § 42. мѣреће, све су равне. Єръ полигонъ овымъ правымъ лініяма дѣлисе на триуглове међусобно равне и подобне, и ньіове су стране равне отстоянію точке *С* одъ углова полигона. Тако є $\triangle ACБ \cong \triangle БCB$ збогъ обште стране *БС*, и стране $AБ = BБ$ (§ 68.), и збогъ угла $x = ю$ (као половине угла *Б*); дакле страна $CA = CB$, и пошто є угалъ *о* (као половина двопресѣченогъ угла *А*) раванъ углу *х*, то є и $CA = CБ$ по § 119. ч. 1; тако и о осталима; дакле $CA = CБ = CB'$ и проч.

145.

Слѣдства. 1. Свакій се полигонъ правиланъ описати може окружіемъ, прелазећимъ преко ошиля углова полигона, єръ и све окружія точке одъ средоточія равноотстоє.

2. И у свако се окружіе може полигонъ правиланъ сочинити.

3. Кадъ се изъ полигона правилногъ средньѣ точке или средоточія повуку праве лініе на углове полигона, оне дѣле 1) углове полигона правилногъ на двое: 2) дѣле цѣо полигонъ на толико подобны' и равны', и равнокраки' триуглова, колико є страна у полигону.

4. Обратно кадъ се углови некогъ полигона правилногъ правыма на двоє дѣле, оне пролазе преко средоточія њгова, или преко средоточія уписаногъ окружія.

146.

Изяснен. Средня точка полигона правилногъ, коя одъ ошиля триуглова полигона правилногъ равноотстои, и коя се са средоточіемъ описаногъ окружія слаже, краткости ради зовесе *средоточіе полигона правилногъ*.

147.

Задатакъ. *Полигонъ правиланъ опасати окружіемъ*. Или фіг. 69. Полигонъ *АБВДЕК ф.* 69. опасати окружіемъ.

Разрѣшеніе. Да се двопресѣку два најближа угла *А* и *Б* по § 144. правыма *АС* и *БС*, точка *С*, у коій се оне удараю, опредѣлюю средоточіе *С*, и зрачацъ *СА* повуњисе имаюћегъ окружія. (Средоточіе и зрачацъ овога повуњисе

имаюћегъ окружія добытисе може такоћеръ, кадъ се две додираюћесе стране, као тетивке сматраю, и двопресѣку, као што смо кодъ триугла видили § 72. и 114. доказателствомъ.

148.

Слѣдства. 1. Свака страна полигона правилногъ затеже у окружію круга описаногъ равањ лукъ, т. є. опредѣлително лукъ одъ толико степеній, колико показує количникъ рѣшителный, произлазећій изъ дѣленія 360 степеній чрезъ число страна. Дакле.

2. Страна ексагона (шестоугла) правилногъ затеже лукъ одъ 60 степеній. Одтудъ страна $АБ$ ексагона правилногъ равна є полупречфиг. 69. нику $СА$ фіг. 69. Єръ у $\triangle АСБ$ угалъ $С = 60^{0}$; дакле $o + x = 120^{0}$ (§ 115. ч. 5.), и због $СА = СБ$ угалъ $o = x = 60^{0}$; дакле и $АБ = СА$ по § 119. ч. 1.

149.

Задатакъ. *У окружіе начертати триугалъ, четвороугалъ и шестоугалъ правилный.*

Разрѣшеніе. Страна шестоугла правилногъ равна є полупречнику по § 148. ч. 2; дафиг. 70. кле узети треба полупречникъ фіг. 70. и по окружію пренети га, бележећи краковима шестара свакога пренешеногъ полупречника точке, ков кадъ се соєдине правима, добыћемо 1) пожела-

ный шестоугалъ правилный; ако ли пакъ по єдну точку изоставимо, па другу соєдинимо, т. є. *ABE*, добыћемо 2) триугалъ правилный (§ 58. 59). 3) Да бы смо у окружіє начертати могли четвороугалъ правилный, треба поставити пречник єданъ на другій отвѣсно, и ньове крайнѣ точке правима фіг. 71. *АБ*, *БВ*, *ВД*, *ДА* союжаваюћи, добыћемо тетрагонъ правилный. ф. 71.

150.

Слѣд. Двопресецанѣмъ лукова одъ страна полигона правилногъ затегнуты можесе число полигона правилногъ свагда удвоити; тако ако се страна тетрагона правилногъ двопресѣче, добыћемо фігуру осмострану, после ако се и те стране двопресѣку, фігуру одъ 16 страна, после 32 стране и т. д.

151.

Задатакъ. *У полигонъ правилный написати окружіє.* *Или у полигонъ* фіг. 72. *АБВДЕ написати окружіє.* ф. 72.

Разрѣш. Двопресецанѣмъ двею найближи полигона правилногъ страна *АБ* и *АЕ* отвѣсно и на двоє по § 49.; точка у коіой се двопресецаюће лініє удараю, опредѣлює средоточіє и зрачацъ уписатисе имаюћегъ окружія (§ 66. ч. 2).

152.

Задатакъ. *У триугалъ задатый АБВ* фіг. 73. *уписати окружіє.* ф. 73.

Разрѣш. Двопресећи треба два угла триуголника задатога н. п. *Б* и *В*, тако ће се двопресецаюће лініє у некой точки *С* пресѣћи. Изъ ове точке *С* повући на єдну страну триугла н. п. *БВ* отвѣсну *СЕ*; ова ће быти зрачацъ, а точка *С* средоточіе пожеланогъ окружія.

Доказателство є изъ предидући увиђавно.

153.

Задатакъ. *У задатый квадратъ АБВД* фіг. 74. *уписати окружіе.* ф. 74.

Разрѣш. Треба повући двоуголне *АВ* и *ДБ*, коє ће се у єдной точки *С* ударити и пресећи. Изъ ове точке *С* на єдну страну квадрата спустити отвѣсну н. п. *СЕ*, ова ће *СЕ* быти зрачацъ, и точка *С* средоточіе уписатисе имаюћегъ окружія.

154.

Наставл. *Ако се у полигонима подобнима изъ углова соотвѣтственны равны на супротне повуку двоуголне, оне ће полигона раздѣлити на триуглове подобне.*

Разрѣш. Да буду полигона *АБВДЕ* и *абвде* фіг. 75. подобна; због соотвѣтственны углова *А* и *а*, *Б* и *б*, *В* и *в*, *Д* и *д*, *Е* и *е*, равны, и све стране соотвѣтственне имаю оно исто међусобно нагибанѣ; тако страна *ДЕ* има оно исто нагибанѣ на *ДВ*, коє има страна *де* на *дв*, равнымъ начиномъ *АЕ* има оно исто нагибанѣ на *ЕД* и ф. 75.

ДБ, коє има *ае* на *ед* и на *дб* и. т. д; ако се дакле изъ соотвѣтственны равны углова као *Д* и *д* повуку двоуголне на супротне углове, стране соотвѣтственне полигона у смотренію сосѣдны двоуголны равнымъ начиномъ єдно или равно нагибанѣ имати мораю, али стране *АЕ* нагибанѣ са двоуголномъ *ДА* изражава угалъ *ЕАД*, а стране *ае* нагибанѣ са двоуголномъ *да* изражава угалъ *еад*; тако стране *ЕД* нагибанѣ са двоуголномъ *ДА* изражава угалъ *ЕДА*, стране *ед* нагибанѣ са *да* представля угалъ *еда*; дакле углови *ЕАД* и *еад*, као *ЕДА* и *еда* осимъ углова *Е* и *е* (и онако равны као полигона подобны соотвѣтственны) равни су; слѣдователно $\triangle$ *АДЕ* ~ *аде* по § 100. Тако исто и $\triangle$ *АБД* ~ *абд* и тако далѣ у свакимъ полигонима подобнима.

155.

Слѣд. Дакле полигона (обратно), коя се діягоналнима, изъ углова соотвѣтственно равны на супротне повученыма, на триугле раздѣлюю, међусобно подобна су.

156.

Наставл. *Ако се одъ два подобна неравна полигона маньій на векій по соотвѣтственнимъ двема странама и по заваћеномъ равномъ уелу сложно положи, остале стране быће међусобно равнотекуће.*

ф. 76. Доказат. Да представимо себи фіг. 76. да се полигонъ маньій *абвдек* на већій *АБВДЕК* по соотвѣтственнимъ двема странама *АБ* и *АК* на раванъ угалъ *БАК*, и изъ истога угла *А* да се на супротне повуку двоуголне *АВ*, *АД*, *АЕ*, бы-ће триугли *АБВ* и *абв*, а такођеръ *ВАД* и *вад* и проч. подобни; дакле соотвѣтственни углови *АВД* и *авд* и проч. кои су споляшньи и унутарньи на єдной страни, међусобно равни, слѣдовательно и стране *бв* # *БВ*, *вд* # *ВД*, и проч.

ГЛАВА ОСМА.

О СОРАЗМѢРНОСТИМА ЛІНІЯ.

157.

Наставл. *Ако се у тригълу на неку страну повуче равнотекућа, остале две стране пресецаюћа, бы'ће одсѣчія изъ ошиля узета, цѣлимъ странама соразмѣрна.* Или фіг. 77. Ако се у ф. 77. △ *АБВ* повуче *ДЕ*, остале две стране пресецаюћа, бы'ће *АД* : *АБ* = *АЕ* : *АВ*.

Доказат. По повученимъ двоуголнима *ДВ* и *ЕБ*, бы'ће △ *ДЕБ* = △ *ЕДВ* због єдне основице *ДЕ* међу равнотекућима наодећесе, на коіой они почиваю. Ако се свакоме одъ овы' триугльова дода △ *АДЕ*, бы'ће опетъ △ *АДВ* = △ *АЕБ*

(§ 11. ч. 7.). Триугли пакъ $АЕД$ и $АЕБ$ имаю єдну высину; єръ имаю ошиля у оной истой точки $Е$, и основице ону исту праву $АБ$ (§ 38. 102.); Равнымъ начиномъ $\triangle АДЕ = \triangle АДВ$ зато, што ошиля у обштой точки $Д$ имаю, а основице исту праву $АВ$, имаю єдну высину, дакле бы̀ће соразмѣрность $\triangle АЕД : \triangle АЕБ = АД : АБ$,

и $\triangle АДЕ : \triangle АДВ = АЕ : АВ$; но будући да су у овима двема соразмѣрностима предидућа два отношенія међусобно равна; дакле и послѣдујућа равна быти мораю, или $АД : АБ = АЕ : АВ$, а то є оно што се имало доказати.

158.

Слѣдства. I. Но и одсѣчія, међу равнотекућима наодећасе, соразмѣрна су као 1) цѣлимъ странама, тако 2) одсѣчіяма, изъ ошиля узетимъ. Єръ 1) постоєћа соразмѣрность $АД : АБ = АЕ : АВ$ преобраћуєсе у ову $АБ - АД : АБ = АВ - АЕ : АВ$, али $АБ - АД = ДБ$, и $АВ - АЕ = ЕВ$ (као што се изъ фігуре види), дакле (равна на мѣсто равны̀ поставляюћи) быва $ДБ : АБ = ЕВ : АВ$. 2) Постоєћа соразмѣрность $АД : АБ = АЕ : АВ$ променюєсе и на ову $АБ - АД : АД = АВ - АЕ : АЕ$, али $АБ - АД = ДБ$, а $АВ - АЕ = ЕВ$; дакле $БД : АД = ЕВ : АЕ$.

II. Ако се дакле у триуглу некомъ на неку страну $БВ$ фіг. 78. повуку ма колико равно- ф. 78.
текућій лінія, свака одсѣчія међу двема равноте-

кућима наодећасе, соразмѣрна су одсѣчіяма међу другима равнотекућима наодећимсе, као $ДБ : КБ = ЕВ : ГВ$, или $ДК : КБ = ЕГ : ГВ$ и проч.

159.

Слѣд. И обратно, ако дакле лінія права две стране триугла тако сѣче, да су одсѣчія или сама себи тили цѣлимъ странама соразмѣрна, права она на трећу є триугла страну равнотекућа.

160.

ф. 78. **Задатакъ.** *Лінію АБ* (фіг. 78.) *на толико частій, колико друга задата права АВ показує, соразмѣрно сѣки.*

Разрѣш. Да се союзе дате две праве $АБ$, $АВ$ подъ поволнимъ угломъ $А$, и ньіове крайнѣ точке $Б$ и $В$ да се союзе правомъ $БВ$, на кою изъ задате праве $АВ$, на нѣне части поделѣне, точака дѣленя $Е, Г$ и проч. да се повуку равнотекуће $ЕД$, $ГК$ и проч.; ове ће сѣки дату праву $АБ$ на пожелане части. Єръ є $АД : АЕ = ДК : ЕГ$ или $= КБ : ГВ$ (§ 158.).

161.

Наставл. *Кадъ у неком триугелу права угаль некій двопресѣца, она ће иста сѣки страну противуположену на два одсѣчія, другимъ*

ф. 79. *двема странама соразмѣрна.* Или фіг. 79.

Кадъ у △ *АБВ* права *АГ* угалъ *БАВ* двопресѣца, она ће сѣћи и страну противуположену *БВ* тако да буде *БГ : ГВ = БА : АВ*.

Доказат. Да се продужи страна *БА* неопредѣлено, и на ту да се пренесе страна *АВ* тако, да буде *АД = АВ*, и точка *Д* да се союзи са точкомъ *В* правомъ *ДВ;* бы'ће права *АГ* на *ДВ* равнотекућа; єръ є угалъ *х* као споляшньій (у смотренію *АГ* и *ДВ*) = *м* внутреномъ на єдной страни; а угалъ *БАВ* (као споляшньій у смотренію △ *ДАВ*) = *м + н* по § 121., или кадъ є због стране *АД* (по сочиненію) = *АВ*, быва и угалъ *м = н* (§ 119. ч. 1.), то *БАВ = м + м* (равна на мѣсто равны поставляюћи) = 2*м*, слѣдователно оба члена уравненія чрезъ 2 дѣлећи, быва $\frac{1}{2}$ *БАВ = м*, али $\frac{1}{2}$ *БАВ = х* (по предпоставляню права *АГ* двопресѣца угалъ *БАВ*), дакле *х = м*. Одтудъ дакле, кадъ є у △ *БВД* права *ГА* # *ВД*, то є онда *БГ : ГВ = БА : АД*, или на мѣсто *АД* поставляюћи *АВ*, быва *БГ : ГВ = БА : АВ*.

162.

Наставл. *Триугелова подобньі стране су соотвѣтственне соразмѣрне.* Или фіг. 51 у △ △ ф. 51. *АБВ* и *абв* стране су соотвѣтственне соразмѣрне.

Доказат. Кадъ се △ *абв* на △ *АБВ* по равномъ углу и по соотвѣтственнимъ странама положи, бы'ће трећа страна *бв* # *БВ* § 122.; дакле бы'ће *АБ : Аб = АВ : Ав* § 156., али *АБ = аб*,

и $АВ = ав$, дакле $АБ : аб = АВ : ав$, или промењујући $АБ : АВ = аб : ав$. А тако исто и $АБ : аб = БВ : бв$, и $БВ : бв = АВ : ав$.

163.

Слѣд. Кадъ су дакле у триуглима подобнима сваке две стране око равны' углова соразмѣрне, и обратно триугли, кои око равны' углова имаю две стране соразмѣрне, подобни су.

164.

Задатакъ. *Къ датимъ трима линіяма, четврту соразмѣрну изнаћи.* Или фіг. 80. да буду фіг. 80. дате три линіе $Аб$, $Ав$, $Аг$, четврту соразмѣрну $АД$ изнаћи.

Доказат. Да се союзе неке две неопредѣлене дужине линіе подъ поволнимъ угломъ $А$, и на єдну овы' страна да се пренесу прве две линіе н. п. $Ав$ на $АВ$ и $Аб$ на $АБ$, на другу страну оны' повучены' линія да се пренесе трећа задата линія $Аг$ на $АГ$, и изъ $В$ на $БГ$ да се повуче $\# ВД$; бы'ће $АД$ пожелана четврта соразмѣрна.

Доказ. Єръ є збогъ $БГ \# ВД$ осимъ обштегъ угла $А$, угалъ $АБГ = АВД$, а сотымъ и трећій трећемъ раванъ т. є. $АГБ = АДВ$, слѣдователно $\triangle АБГ \sim \triangle АВД$, али у подобнима триуглима стране су соотвѣтственне соразмѣрне (§ 162.); дакле $АБ : АВ = АГ : АД$. кое се имало доказати.

165.

Слѣд. Равнимъ начиномъ и трећа на задате две праве соразмѣрна изнаћисе може, кадъ се друга, пошто є већъ на єданъ кракъ назначенога угла пренешена, и на другій іоштъ єдан-путъ пренесе, и проча по предидућемъ разрѣшенію сочинесе.

166.

Задатакъ. *Дату праву ДЕ* Фіг. 81. *на ф* 81. *неколико н. п. на три равне части подѣлити.*

Разрѣш. Да се повуче права нека *АБ* поволне дужине, и на ню да се пренесу три (или толико, на колико се частій права подѣлити има) равне части поволне величине. Ове три части *АБ* скупа узимаюћи међу краке шестара да се њоме сочини $\triangle$ равностранъ *АБВ*, па онда узети треба задату праву *ДЕ* међу краке шестара и ню на оба крака сочињеног триугла изъ ошиля пренети, да $ВД = ВЕ = ДЕ$, после изъ ошиля угла *В* да се повуку на точке дѣленя *К* и *Г*, праве *ВК*, *ВГ*; лінія задата *ДЕ* у сочињеноме триуглу *ВДЕ* дѣлисе или сѣчесе правима *ВК*, *ВГ* у *х* и *ю* на пожелане три равне части тако да є $Дх = хю = юЕ$.

Доказ. 1. Триугалъ *ВДЕ* због $ВД = ВЕ$ (по сочиненію) равнокракъ є, и због обштегъ угла *В* подобанъ $\triangle$ *ВАБ* (§ 119. ч. 4.), слѣдо-

вателно угалъ $ВДЕ = А$, и угалъ $ВЕД = Б$ (§ 122.), али у $\triangle$ $ВАБ$ равностраномъ (по сочиненію) угалъ $А = Б = В$ (§ 119. ч. 1. ч. 3.); дакле и у $\triangle$ $ВДЕ$ угалъ $Д = Е = В$; слѣдователно и $\triangle$ $ВДЕ$ равностранъ є, и тако $ДЕ = ДВ = ВЕ$.

2. Триугли $ВКА$ и $ВхД$ подобни су; єръ є угалъ $В$ у оба обштій, а $Д = А$ (по предиућемъ доказат.), дакле и трећій трећемъ $Е = Б$ (§ 115. ч. 7.); одтудъ $АК : АВ = Дх : ДВ$ (§ 162.), али $АК = \frac{1}{3}\ АБ = \frac{1}{3}\ АВ$ (по сочиненію); дакле и $Дх = \frac{1}{3}\ ДЕ = \frac{1}{3}\ ДВ$. Равнимъ начиномъ у $\triangle$ $ВГА$ и $\triangle$ $ВюД$ подобнима $АГ : АВ = Дю : ДВ$, али $АГ = \frac{2}{3}\ АБ = \frac{2}{3}\ АВ$; дакле и $Дю = \frac{2}{3}\ ДЕ = \frac{2}{3}\ ДВ$ и проч. дакле $Дх = хю = юЕ$.

167.

Наставл. *Кадъ се у триуглу десноуголномъ изъ десноєъ угла на ипотенузу спусти отвѣсна, она ће быти средня соразмѣрна међу ипотенузе одсѣчіяма.* Или фіг. 82. у $\triangle$ $БАВ$ десноуголномъ отвѣсна $АГ$ средня є соразмѣрна. т. є. $ГБ : АГ = АГ : ГВ$.

ф. 82.

Доказат. Речена лінія отвѣсна дѣли цѣо триугалъ $АБВ$ на два маня триугла $АГБ$ и $АГВ$ подобна (§ 124.), дакле (у $\triangle$ $АГБ$) є $БГ : АГ =$ (у $\triangle$ $АГВ$) $АГ : ГВ$. (§ 162.) коє се имало доказати.

168.

Слѣд. Ако се дакле ма изъ коє окружія точке *А.* фіг. 83. спусти на пречникъ *БВ* ф 83. отвѣсна *АД*, она є средня соразмѣрна међу пречника одсѣчіяма *ДБ* и *ДВ*. Єръ, кадъ се она окружія точка *А* тетивкама *АБ*, *АВ* са краєвима пречника союзи, быће △ *БАВ* десноуголанъ (по § 81. ч. 2.) са отвѣсномъ изъ десногъ угла на ипотенузу спуштеномъ (§ 124.).

169.

Задатакъ. *Међу двема датима правима линіяма средню геометрически соразмѣрну изнаћи.* Или фіг. 83. међу задатимъ двема пра- ф. 83. вимъ линіяма *КГ* и *ХК* средню геометр. соразмѣрну изнаћи.

Разрѣш. Задате оне две праве да се пренесу на єдну тако, да буде $КГ + ХК = БВ$, и надъ овомъ као пречникомъ изъ среднѣ нѣне *С* као средоточія круга, да се напише окружіе, после изъ точке међусобногъ союжаваня *Д* да се подигне отвѣсна *ДА*, коя ће окружіе пресећи: она є пожелана средня соразмѣрна, или $БД : АД = АД : ДВ$ (§ 167. 168.).

170.

Наставл. *Ако се изъ точке неке на окружіе повуче єдна дирка, друга сѣчица, быће*

дирка средня геометрически соразмѣрна међу цѣломъ сѣчицомъ и нѣнымъ одсѣчіемъ ванъ окружія наодекћимисе. ф. 84. **Или фіг. 84. Ако се повуче изъ точке** *А* **на окружіе дирка** *АВ* **и сѣчица** *АБ*, **бы'ће** $АБ : АВ = АВ : АГ$.

Доказат. По повученимъ тетивкама *ГВ* **и** *ВБ*, $\triangle АВГ \sim \triangle АБВ$; **єръ осимъ обштегъ угла** *А*, **углови су** $АВГ = АБВ$ (§ 80. **збогъ єдне** $\frac{1}{2}$ **лука** *ВГ* **мѣре**), **слѣдователно и трећій трећемъ мора быти раванъ; дакле су ово триугли подобни, а у подобнима триуглима стране су соотвѣтственне соразмѣрне** (§ 162.), **дакле поставляюћи соразмѣрность, бы'ће** $АБ : АВ = АВ : АГ$, **кое се доказати имало.**

171.

Наставл. *Кадъ се изъ точке неке ванъ окружія наодекћесе, повуку две сѣчице на окружіе, бы'ће нѣова одсѣчія ванъ окружія положена, цѣлимъ сѣчицама узаймно узета соразмѣрна.* ф. 85. **Или фіг. 85. На окружіе** *БВДГБ* **изъ точке** *А* **кадъ се повуку две сѣчице** *АБ* **и** *АВ* **бы'ће** $АБ : АВ = АД : АГ$.

Доказат. По повученимъ тетивкама *ГВ* **и** *ДБ*, $\triangle АДБ \sim \triangle АГВ$; **єръ имаю осимъ обштегъ угла** *А*, **углове** *Б* **и** *В* **равне** (§ 81. ч. 3.), **дакле** § 115. ч. 7., **а у триуглима подобнима стране су соотвѣтственне соразмѣрне; дакле** $АБ : АВ = АД : АГ$.

172.

Наставл. *Одсѣчія тетивака пресецаюћисе узаймно су соразмѣрна.* **Или фіг. 86. одсѣчія** *ВД* **и** *ДБ* **тетивака** *АБ* **и** *ВГ* **пресецаюћій се узаймно су соразмѣрна т. є.** *АЕ : ВЕ = ДЕ : ЕБ.* фіг. 86.

Доказ. По повученимъ тетивкама *ВБ* **и** *АД* **добыћемо два триугла** *АДВ* **и** *БАД*, **кои су подобни; єръ су у њима сва три угла међусобно соотвѣтственно равна. Угли су** *ВЕБ* **и** *АЕД* **као очельни међусобно равни (§ 45.); угаљ** *Б* **= уг.** *Д* **због єдне мѣре $\frac{1}{2}$ лука** *АВ* **(по § 81. ч. 3.), и угаљ** *А* **= уг.** *В* **због єдне $\frac{1}{2}$ лука** *БД* **мѣре. Ови су дакле триугли подобни, а у подобнима триуглима стране су соотвѣтственне соразмѣрне; дакле** *АЕ : ВЕ = ДЕ : ЕБ.*

173.

Изясненіе. Лінію *средњимъ и крајњимъ отношеніємъ сѣчи* **зовесе лінію на две неєднаке части сѣћи тако, да њена часть већа буде средня соразмѣрна међу цѣломъ лініомъ и њеномъ частію мањомъ.**

174.

Задатакъ. *Дату лінію АБ* **фіг. 86′.** *средњимъ и крајњимъ отношеніємъ сѣчи.* фіг. 86′.

Разрѣш. Подизаюћи изъ крајнѣ ма коє точке н. п. *Б* **дате праве лініе** *АБ* **отвѣсну** *БМ*,

коя да буде равна половини *АБ*, после са оном истомъ отвѣсномъ *БМ* као полупречникомъ изъ *М* као средоточія да се напише окружіе круга *БГВБ*, бы'ће дата права *АБ* дирка (§ 70. ч. 1.). Далѣ изъ друге крайнѣ точке *А* задате праве *АБ* и преко средоточія *М* да се повуче сѣчица *АВ*, и одсѣчіе ове ванъ окружія положено *АГ*, да се пренесе на дату праву изъ *А* до *Д* тако, да буде $АД = АГ$; точка *Д* бы'ће она, у коіой се дата права по исканю сѣче тако, да стои $АБ : АД = АД : ДБ$.

Доказат. По сочиненію фігуре стои

$АВ : АБ = АБ : АГ$. по § 170.

дакле $АВ - АБ : АБ = АБ - АГ : АГ$ (отятіемъ променута)

али $АВ - АБ = АГ$ (по сочиненію $АБ = 2МБ$) $= ГВ$ пречнику.

Али $АВ - ГВ = АГ$;

дакле и $АВ - АБ = АГ$;

такоѣеръ $АБ - АГ = ДБ$ (єръ є по сочиненію $АГ = АД$),

али $АБ - АД = ДБ$, дакле

и $АБ - АГ = ДБ$:

одтудъ $АГ : АБ = ДБ : АГ$ (поставляюћи равна на мѣсто равны)

или $АБ : АД = АД : ДБ$ (на мѣсто *АГ* поставляюћи *АД*, и соразмѣрность преокретаюћи),

а то є оно што се доказати имало.

175.

Наставл. *Кадъ се у триугелу равнокракомъ, кога су оба угла на основицы лежећа, свакій двоянъ угла у вр'у триугла положена, ма кои угалъ при основицы некомъ правомъ двопресѣче, истомъ ће се правомъ сѣћи страна оволъ углу супротна средньимъ и крайньимъ отношеніємъ.*

Или у △ *АБВ* равнокракомъ фіг. 87., у ко- *ф.* 87.
ме є $Б = 2A$, и $B = 2A$, кадъ се угалъ *В* правомъ *ГВ* двопресѣче; страна супротна *АБ* сѣче се на два одсѣчія *АГ* и *БГ* средньимъ и крайньимъ отношеніємъ тако, да быва $БГ : АГ = АГ : АБ$.

Доказат. Збогъ угла *В* двопресѣченогъ стои сораз:

$БГ : АГ = БВ : АВ$ по § 171.
али $АВ = АБ$, равне стране,
и $БВ = АГ$,

дакле $БГ : АГ = АГ : АБ$, равна на мѣсто равны' поставл: Доказатисе има да є $БВ = АГ$, коє се овако посведочава: у △ *АБВ* по предреченнымъ овога свойствама угалъ є $A = 36^{v}$, $Б = 72^{v}$, $B = 72^{v}$ по § 114. и кадъ се цѣо угалъ $B = 72^{v}$ правомъ *ВГ* двопресѣца, и угалъ є $БВГ = ГВА = 36^{v} = A$, а тако є и у △ *БВГ* и угалъ $БГВ = 72^{v}$. § 114., 115. ч. 6. слѣдователно $БВ = ГВ = АГ$ § 119. ч. 1.

176.

Задатакъ. *Сочинити триугаль равнокракъ тога свойства, да свакій угаль при основицы двоянъ буде угла у вр'у триугла наодекее' се.*

ф. 87. **Разрѣшеніе.** Да се кракъ *АБ* фіг. 87. триугла *АБВ* сѣче средньимъ и крайньимъ отношеніемъ по § 174. и одсѣчіемъ већимъ *АГ* као полупречникомъ изъ точке пресецаня *Г* и изъ друге одсѣчія манѣгъ *ГБ* крайнѣ точке *Б* да се назначе пресецаюћиисе лукови у *В*, ова точка *В* да се союзи правима са *А* и *Б*; △ *АБВ* пожеланогъ свойства сочинѣнъ є.

Доказат. Да се повуче права *ГВ*; добыћемо △ *БВГ* равнокракъ (због $ГВ = ВБ$ као $= АГ$), а скупа и подобанъ △ *БАВ*. Єръ по предидућемъ сочиненію пошто є страна *АБ* средньимъ и крайньимъ отношеніемъ пресѣчена, быва $АБ : АГ = АГ : ГБ$ (§ 174.), или због $АГ = БВ$ быва $АБ : БВ = БВ : ГБ$ (§ 11. ч. 4.), то єсть : △ △ *БВГ* и *БАВ* имаю стране око обштегъ дакле равногъ угла *Б* соразмѣрне, али такови су триугли подобни § 163.; дакле △ *БВГ* ~ △ *АБВ*; слѣдователно угалъ *ВБГ* (као обоима △ обштій) = углу *ВБА*, угалъ *БВГ* (као маньій угла *БВА*, у коме се онъ као часть у цѣломе содржава) = углу *БАВ* (§ 105. и 119. ч. 1.), и сотимъ угалъ $ВГБ =$ углу *АВБ* (§ 115. ч. 7.); єръ є угалъ $ВГБ =$ углу *ВБГ* (због $БВ = ГВ$); дакле є и угалъ $АВБ =$ углу *АБВ*, слѣдователно страна $АВ = АБ$

(§ 119. ч. 1.), и △ *АБВ* равнокракъ є (§ 119: ч. 2.). Далѣ угалъ *АБВ* двоянъ є угла *А*, или = 2*А*; єръ є угалъ *АБВ* или *ГБВ* (§ 27.) = углу *ВГБ*, али угалъ *ВГБ* (као сполящньій у смотренію △ *АГВ*) = углу *ГВА* + *А* (§ 121., или *А* на мѣсто равногъ угла *ГВА* због *АГ* = *ГВ* поставляюћи) = *А* + *А* = 2*А*; дакле є и угалъ *АВБ* двоянъ угла *А*, или = 2*А*. Слѣдователно пожеланый триугалъ по предидућемъ разрѣшенію добро є сочинѣнъ.

177.

Задатакъ. *У окружіе уписати* 1) *декагонъ* (десетоугалъ); 2) *пентагонъ* (петоугалъ) *правилньій.*

Разрѣш. Зрачацъ *АБ* окружія фіг. 88., да се сѣче средньимъ и крайньимъ отношеніемъ, одсѣчіе веће є страна декагона правилногъ, кою пренашаюћи десеть пута, точно ће цѣло окружіе заватити. Кадъ се дакле точке поєдине сосѣдне и на окружію назначене правима соєдине, добыће се декагонъ: а ако се по єдна изостави, па се прва съ трећомъ и т. д. союзи правима, добыћемо пентагонъ правилный. фіг. 88.

Доказат. Ако се по § 176. сочини триугалъ равнокракъ, коега є кракъ зрачацъ окружія, угалъ *А* у вр'у триугла наодећійсе, дакле и нѣговъ лукъ *БВ*, кои одсѣчіе веће полупречника затеже средньимъ и крайньимъ отношеніемъ сѣ-

чѐногъ, содржава 36^v, као што є изъ свойства овога триугла познато (§ 175.), али толико степеній затеже и страна декагона правилногъ § 148; дакле полупречника средньимъ и крайньимъ отношеніємъ сѣченога, одсѣчіе веће страна є декагона правилногъ.

178.

Задатакъ. *Полигонъ правилный, коега є страна АБ* фіг. 89. *задата, сочинити* 1) *геометрически*, 2) *механически средствомъ преносителя* (transportatorium). ф. 89.

Разрѣш. 1) Изъ крайны' дате стране *АБ* точака *А* и *Б* полупречникомъ равнымъ истой страни да се назначе пресецаюћисе лукови у *М*, да се союзи *М* правима са *А* и *Б*; бы'ће *АБМ* триугалъ равностранъ, слѣдователно правиланъ § 98.

Кадъ се изъ крайньи' дате праве стране точака *А* и *Б* подигну лініє отвѣсне *АВ*, и *ВД*, датой страни равне, и точке *В* и *Д* правомъ *ВД* соєдинесе, добыћемо квадратъ, слѣдователно тетрагонъ правиланъ (129. и 130.).

За остала полигона правилна слѣдующій начинъ служити може: Да се упише или начерта у окружіє поволногъ полупречника полигонъ *абвде* фіг. 90. поволнога вида, бы'ће триугли у начертаному *амб*, и *АМБ* начертатисе имаюћемъ полигону (кои се као начертанъ у окружію међутимъ ф. 90.

представити може) међусобно подобни; слѣдовательно *аб : ам = АБ : АМ* (§ 162.), одкуда се наћи може четвртій членъ или полупречникъ *АМ* онога окружія, у коме се дата страна точно толико пута пренети може, колико страна пожеланый полигонъ има. Кадъ смо зрачацъ *АМ* изнашли, да се назначе изъ *А* и *Б* пресецаюћисе у *М* лукови, и изъ исте ове точке *М* да се напише окружіе круга *АБВДЕА*, и на нѣга да се пренесе задата страна. Но овымъ начиномъ само се она полигона правилна, коя се у окружіе геометрічески уписати могу, надъ задатомъ страномъ геометрически сочинити могу. Зато

2) Она полигона правилна, коя се у окружіе геометрічески уписати немогу, механически средствомъ преносителя слѣдующимъ начиномъ надъ задатомъ страномъ сочиняваюсе: да се назначи у крайньима стране *АБ* фіг. 91. точкама *А* и *Б* средствомъ преносителя угалъ, кои ће раванъ бити половини сочинитисе имаюћегъ полигона углу, и изъ точке *М*, гди се стране сочинѣны углова удараю (§ 144. ч. 4.), да се напише полупречникомъ *АМ* окружіе, на кое задату страну пренети валя толико пута, колико се зактевало. фіг. 91.

Примѣчаніе. Неће излишно быти, ученицыма употребленіе *преносителя* или полуокружія на степене раздѣленогъ, съ коимъ се на артіи свакій угалъ сочинити може, изложити. Найпре се опредѣли угалъ сочинитисе имаюћегъ полигона по § 142. и 23. после поставити треба пре-

носитель на задату *АБ* сочинитисе имаюћегъ полигона тако, да се средоточіе преносителя са крайњомъ точкомъ *А*, пречникъ нћговъ са задатомъ страномъ *АБ* слаже, после изъ пречника окрайности *Е*, на задатой страни наодећегсе, починяюћи да се изчисле на преносителћвимъ окружіемъ половина толико степеній, колико угалъ сочинитисе имаюћегъ полигона, пре тога опредћленый, содржава, точка она *Д*, у коіой се полакъ числа степеній опредћленогъ угла окончава, да се забележи, и преко ове да се повуче изъ *А* неопредћлена *АДМ*. А то исто да се учини и на другомъ окрайку *Б* задате стране *АБ*. Изъ точке *М*, у коіой се *АМ* и *БМ* пресецаю, полупречникомъ *МА* да се напише окружіе круга, и на то да се пренесе дата страна *АБ* онолико пута, колико се ище, да пожеланый полигонъ сочини.

179.

Наставл. *Стране соотвћтственне полигона подобны соразмћрне су.*

Доказат. Ако се изъ соотвћтственны углова равны на супротне повуку двоуголне, она се полигона фіг. 75. *АБВДЕ* и *абвде* цепаю на триугле подобне § 154.; дакле у △ *АДЕ*, и △ *аде* быва $ЕД : ед = АЕ : ае$ (§ 162.), и $АЕ : ае = АД : ад$, и $АД : ад = АБ : аб$, дакле и $АЕ : ае = АБ : аб$; у △ *БДВ* и △ *бдв* быва $БВ : бв = ДВ : дв$.

ф. 75.

180.

Наставл. *Омѣрія полигона подобны' имаюсе као сваке две стране соотвѣтственне.*

Доказат. Предпоставляюћи да су полигона фіг. 75. *АБВДЕ* и *абвде* подобна; бы'ће *АБ* : *аб* = *БВ* : *бв* = *ВД* : *вд* = *ДЕ* : *де* = *ЕА* : *еа* (§ 179.), дакле и сумма предидући' *АБ* + *БВ* + *БД* *ДЕ* + *ЕА* или омѣріе *О* имасе къ сумми послѣдуюћи' *аб* + *бв* + *вд* + *де* + *еа* или омѣріе *о* = *АБ* : *аб* или = *БВ* : *бв* и. проч. фіг. 75.

181.

Наставл. *Омѣрія полигона подобны' имаюсе такоћеръ као сваке две двоуголне соотвѣтствителне, изъ равны' углова на супротне повучене.*

Доказ. Омѣріе єднога полигона назначаваюћи са *О*, а другога *о*, бы'ће у фіг. 75. *О* : *о* = *АБ* : *аб* (§ 180.), но због подобны' триуглова *АДВ* и *адв* быва *АБ* : *аб* = *АД* : *ад* или *БД* : *бд* (§ 162.); дакле и *О* : *о* = *АД* : *ад*, или = *БД* : *бд*. фіг. 75.

182.

Наставл. *Омѣрія полигона правилны' подобны' имаюсе као полупречници описаны' окружія.*

Доказат. Да назначимо фіг. 90. омѣріе већега полигона са *О*, а манѣга са *о*, быва *О* : *о* фіг. 90.

$= AБ : аб$ по § 180., али кадъ су $\triangle AMБ$ и $\triangle амб$ равнокраци (по § 21. ч. 1.), и због равны' углова M и $м$ (§ 148. ч. 1.) подобни (§ 119. ч. 4.), быва $AБ : аб = MA : ма$ (§ 162.); дакле $O : o = MA : ма$.

183.

Слѣдства. 1. Окружія дакле кругова имаюсе као полупречници или пречници. Єръ се окружія сматрати могу као полигона правилна подобна, као полигона безчислены' страна неопредѣлено малы', и тако међусобно равны'.

2. Дакле и полуокружія, четверти окружія, и вообште сви *лукови подобни*, кои т. є. у смотренію ньіовы' окружія оно исто число степеній имаю, имаюсе као полупречници. Ако се два окружія назначе са $П$ и $п$, ньіови полупречници са $P : p$, быва $П : п = P : p$ (по овога § ч. 1.), одтудъ $\frac{1}{2} П : \frac{1}{2} п = P : p$, или $\frac{1}{4} П : \frac{1}{4} п = P : p$; и. т. д.

3. Ако дакле буде отношеніе познато, вообште међу пречникомъ и окружіемъ, као међу замѣномъ праве лініе опредѣлене, и ако се на то поособъ зада пречникъ надлежный такођеръ у равноважной лініи правой, и обратно изъ задатогъ окружія надлежный пречникъ безъ сваке теготе наћисе може. Али

Примѣчаніе. Оваково отношеніе у смислу математическомъ опредѣлити, тегота є непо-

бећена, и непобѣдима. Зато су многи учени мужеви теженя своя на то обратили, да бы овако отношеніе, у колико є возможно, што ближе и совершеніе изнашли, коє бы се не само у свакой потреби обштой, но и у потреби геометрической безъ знамените рачуна погрешке употребити могло. По рачуну *Архімедовомъ* има се вообште пречникъ на окружіе као 7 : 22; по рачуну *Лудолфа* (у смотренію само прве три цифре) има се као 100 : 314. Оно пакъ пречника къ своме окружію отношеніе, коє є *Адріянъ Метій* међу списаніяма почившегъ своегъ отца нашао, ово є као 113 : 355.

На примѣръ, да намъ є задатъ пречникъ $= 14'$, кога се окружіе x тражити има у равноважной правой ліни; бы ће $7 : 22 = 14' : x$, одтудъ $7x = 22 \times 14' = 308'$, и $x = \frac{308}{7} = 44'$. Или на краће, $7 : 22 = 14 : x$, предидуће чрезъ 7 дѣлећи, быва $1 : 22 = 2 : x$, и одтудъ $x = 2 \times 22 = 44'$.

ГЛАВА ДЕВЕТА.

О ПОВРШИНАМА.

184.

Изяснен. *Мѣрити*, зовесе отношеніе числено изнаћи међу количествомъ; коє се мѣрити

има, и међу другимъ количествомъ истога рода, кое се као єдиница за мѣру узима (т. є. съ коіомъ се мѣри). Ова се єдиница зове *мѣра*. Дакле мѣрити зовесе отношеніе числено изнаћи међу мѣритисе имаюћимъ количествомъ и мѣромъ.

185.

Слѣд: Мѣра мора опредѣлено количество быти, слѣдователно непремѣнно, и свагда са количествомъ, кое се мѣри, равноимено. Зато се могу лініе лініяма, површине површинама, а тѣла съ тѣлама мѣрити. И одтудъ мѣра, коіомъ лініе мѣримо, зовесе *мѣра дужине*; а она, съ коіомъ површине мѣримо, *мѣра површности* или *мѣра квадратна*; она пакъ, коіомъ тѣла мѣримо, *мѣра кубическа*.

186.

Изясненн. 1. Єдиница съ коіомъ се послужуємо при мѣри дужине, то є єдна права лінія, коя одъ прилике дужину човечіе стопе има, и зато се зове *стопа* (pes).

А за мѣренѣ дужій лінія опредѣлена є єдиница, коя се зове *хватъ*, кои є 6 стопа дугачакъ. Већа отстоянія мѣресе ланцемъ, коєга є дужина 10 хватій. Іоштъ већа отстоянія мѣресе миляма, одъ кои' єдна има 4000 хватій, или 24000 стопа.

Стопа дѣлисе на 12 равны' частій и свака ова часть зовесе *палацъ*, палацъ на 12 *лінія*, а лінія на 12 точкій.

За назначеніе хвата употребљоесе овай знакъ (0)
" " стопе " " " (′)
" " палца " " " (″)
" " лініе " " " (‴)
и т. д.

Єдиница за меренѣ површине, та є найправилнія површина или квадратъ, коега є свака страна равна єдной стопи, и зато се зове *стопа квадратна* (□′).

Квадратный хватъ (□⁰) има 36 □′, єдна квадратна стопа 144 квадратны палаца (□″), а квадратный палацъ има 144 квадратны лінія (□‴) и т. д.

Тако исто има квадратна миля 16,000.000 квадратны хватій.

Єдно јутро или *данъ ораня* состоисе изъ 1.600 квадратны хватій, дакле квадратна миля има 10.000 јутара.

187.

Изясн. *Лінію неку мѣрити* зовесе изтраживати, колико она хватій, стопа и палаца има, т. є. колико є хватій и т. д. дугачка, и оно є число, коє показує, колико се пута ова єдиница хватъ са своимъ подраздѣленіяма у оной лініи садржава, управъ *мѣра* оне лініе.

188.

Слѣд. Права се лінія дакле самимъ броянѣмъ, колико се пута єдиница са своимъ подраздѣленіяма у ньой єодржава, мѣри.

189.

Изясн. Мѣра површине є (§ 186.) стопа квадратна, дакле кадъ бы имали површину какву мѣрити, морали бы єдиницу (стопу квадратну) толико пута єдну до друге мѣнати, колико се пута то на мѣритисе имаюћой површини учинити може. Далѣ на остатакъ задате површине, коя бы маня была одъ єдне стопе, морали бы палацъ квадратный поставляти, да бы дознати могли, колико се пута свакій родъ овы' єдиница у мѣритисе имаюћой површини содржава, и сотимъ се површине просторъ опредѣлює.

Но будући да се мѣренѣ простора површногъ дѣйствително на другомъ мѣсту и у већой обширности (коє є предмѣтъ практіческогъ землѣмѣрія) предавати има, овде у овой части имамо мы онай начинъ геометрическій изложити, коимъ се површный просторъ помоћію рачуна изнаћи може.

190.

Наставл. *Преко три точке неуредно наодекесе, само се єдна површина равна повући може.*

ф. 92. Или фіг. 92. преко три чочке *А, Б, В* само се єдна површина равна повући може.

Доказат. Изъ *А* да се повуку праве лініє *АБ* и *АВ*, после да представимо себи, да се права *АБ* поредъ праве *АВ* движе, изродићесе вообште површина равна (§ 5.), коя преко задате три

точке прелази. Да се движе далѣ ма колико пута и ма каква лінія права по *АБ* изъ *А* къ *В* по ономъ истомъ управленію *АВ*, или по *АВ* изъ *А* къ *Б* по управленію *АБ*, свагда ће се изродити површина равна, са пређашњомъ слагаюћасе, и ону исту сочињаваюћа.

191.

Слѣд. Одтудъ три точке, коє положеніе своє у правой лініи немаю, опредѣлюю станѣ, положеніе и управленіе површине праволінейне тако, да се две површине равне, као површине у три точке додирнути не могу, безъ да се небы у єдну сложиле.

Примѣч. Одтудъ се види узрокъ, зашто сацакъ, асталъ или столица тронога и проч. на патосу собномъ свагди и свагда тврдо (макаръ на хоризонтъ не равнотекуће) стои, и нелюлясе, коє се са четвороногимъ свагда недогађа.

192.

Изяснен. По разлики движенія и управленія лініе производеће произлазе равне површине *праволінейне* или *површине равне*, ако движећасе лінія предузето движеніе своє постоянымъ управленіемъ задржи, иначе *криве* или *криволінейне*. Ова криволінейна далѣ іоштъ може быти *пупчаста* (convexa), или *дубаста* (concava), т. є. површина изпупчено узвышена, или издубљена.

193.

ф. 57. **Изяснен.** Параллелограммъ *АБВД* фіг. 57. рађасе, кадъ се лінія права производећа *АБ* по управленію друге неке праве лініе *АД* движеніемъ равнотекућимъ движе, и движеніемъ своимъ трагъ за собомъ непресѣчно заоставля. Ако *лінія управителница АД* фіг. 57. буде отвѣсна на лінію или основицу производећу *АБ*, рађасе параллелограммъ десноуголанъ, ако пакъ управителф. 60. ница *АВ* фіг. 60. на основицу буде косса, произведеный параллелограммъ быће косоуголанъ.

194.

Наставл. *Просторъ површный параллелограмма равань є производу изъ основице нѣгове и высине.*

Доказат. Єръ параллелограммъ по постаню нѣговомь (§. предидућ.) состоисе изъ основа ф. 57. *АБ* фіг. 57. толико пута по управителницы *АД* узетогъ, колико є у управителницы *АД* точкій, али то значи, основицу толико пута узети, колико у высини нѣговой *АД* точкій има; дакле

И то є свеєдно, или параллелограммъ быо десноуголанъ или коссоуголанъ: єръ коссоуголф. 67. анъ *АБВД* фіг. 67. равань є десноуголномъ *АБНК* збогъ триуглова *АДК* и *БВН* равны.

195.

Слѣд. 1. Кадъ є триугалъ половина параллелограмма одъ оне исте основице и высине по § 134. ч. 4. *просторъ површньій триугла раванъ є пола производу изъ основице и высине*; то єсть: *производу изъ пола основице и высине*, или обратно, *изъ цѣле основице и пола высине*. Или

2. Да назначимо површину єднога триугла $= \Pi$, основицу $= O$, а высину $= B$; слѣдує

$$\Pi = \frac{O \times B}{2}$$ изъ овога слѣдує

$$\Pi = \frac{O}{2} \times B = O \times \frac{B}{2}.$$

Ако и другога триугла површину назначимо $= \pi$, нѣгову основицу o, а высину $в$, имасе

$$\Pi : \pi = \tfrac{1}{2}\, OB : \tfrac{1}{2}\, ов, \text{ или}$$

$$\Pi : \pi = OB : ов;$$

ако є $O = o$, могусе членови другогъ отношенія чрезъ O и o дѣлити, т. є. предидућій членъ OB чрезъ O, а послѣдуюћій $ов$, чрезъ o, бы'ће

$\Pi : \pi = B : в$; то єсть: ако два триугла єднаке основице буду имала, она ће се међу собомъ имати као высине нъіове. Ако ли пакъ $B = в$, могусе у истой оной пређашньой сразмѣрности $\Pi : \pi = OB : ов$ другога отношенія членови чрезъ B и $в$ дѣлити, тако ћемо добыти

$П : п = О : о$; т. є. ако два триугла єднаке высине буду имала, она ће се међу собомъ имати као њіове основице.

3. Ако дакле два триугла имаю равне основице и равне высине, они ће быти у смотренію простора површногъ равни (§ 104.). Єръ є у таковомъ случаю $О = о$, и $В = в$, кадъ се у овой соразмѣрности $П : п = ОВ : ов$ друго отношеніе раздѣли чрезъ $О$ и $о$, пакъ чрезъ $В$ и $в$, слѣдує $П : п = 1 : 1$; дакле $П = п$.

4. Одтудъ ако се два (или више) триугла налазе међу двема равнотекућима надъ обштомъ основицомъ, они су међусобно равни. Єръ осимъ обште и равне основице имаю и равне высине.

5. Два триугла могу дакле у смотренію површногъ простора равни быти, безъ да бы међусобно подобни были.

196.

Наставленіє. *Површина квадрата правилногъ равна є производу основице и высине нѣгове, или равна є производу єдне стране нѣгове, умножене са собомъ самомъ.*

Доказат. Будући да се параллелограмми међусобно тако имаю, као њіови производи изъ основице и высине (§ 195. ч. 2.), дакле ако у фіг. 93. малый онай квадратъ $Е$ єдиница, съ коіомъ онай великій квадратъ $АБВГ$ измѣрити имамо, то найпре опредѣлити треба мѣру основице

ф. 93.

ГВ и высине *ГА* мѣромъ дужине *аб*, производъ ће ове две мѣре дати просторну површину квадрата *АБВГ*; дакле

$$АБВГ : E = ГВ \times ГА : гв \times га.$$

Ако є $гв \,.\, га = 1$, т. є. єдиницы мѣре дужине, то є ньіовъ производъ опетъ єдиница, а *E* єдиница мѣре површне, дакле мора быти

$$АБВГ : E = ГВ \times ГА : 1,$$

или $$АБВГ = ГВ \times ГА \times E.$$

Тако дакле садржава квадратъ правилный *АБВГ* у своіой површини $ГВ \times ГА$ пута єдиницу мѣре површне *E*.

Ако є *E* стопа квадратна, то є *аб* стопа у дужину. Дакле, *површина или просторъ површный квадрата нађи се може, кадъ се ньегова основица и высина измѣри, и ове се мѣре међусобно умноже.*

197.

Слѣд. Будући да є свакій квадратъ равностраный четвороугалъ правилный, слѣдує: просторъ површный квадрата израчунатисе може, кадъ се мѣра єдне стране собомъ самомъ умножи.

198.

Задатакъ. *Изъ задате површине паралелограмма, и єдне къ ньеговомъ рачуну нуждне стране, другу страну изнаћи.*

Разрѣш. Да назначимо површину паралле-лограмма $= П$, основицу $= О$, а нѣгову высину $= В$, бы'ће по § 194 $П = ОВ$. Ако ово уравненіе за $О$ и $В$ разрѣшимо, нађи ћемо

$$О = \frac{П}{В}, \text{ а } В = \frac{П}{О}.$$

199.

Задатакъ. *Изъ задате и познате површине квадрата, нѣгову страну изнаћи.*

Разрѣш. Ако є $Е$ позната површина, а $х$ страна, коя се тражи, бы'ће по § 196. $Е = х^2$, дакле $х = \sqrt{Е}$.

200.

Наставл. *Просторъ површный трапезія две равнотекуће стране имаюћегъ, равањ є производу изъ полусумме страна равнотекућій и нѣовогъ отстоянія међусобногъ.* Или фіг. 94. простор површный трапезія $АБДВ = (\frac{1}{2} АБ + \frac{1}{2} ВД) \times АЕ$. ф. 94.

Доказат. Кадъ се двоуголна повуче $АД$, трапезій дѣлисе на $\triangle АДБ$, кога є высина $ДК$, на $АБ$ отвѣсна, и на $\triangle ВАД$, коега є высина $АЕ$ на $ВД$ (продужену) отвѣсна, коя скупа изражава међусобно отстояніе равнотекућій страна, али просторъ површный $\triangle АДБ = \frac{1}{2} АБ \times ДК$ (или збогъ $ДК = АЕ$ по § 51.) $= \frac{1}{2} АБ \times АЕ$, а просторъ површный $\triangle ВАД = \frac{1}{2} ДВ \times АЕ$ (§ 195.);

дакле просторъ површный трапезія $АВДБ = \frac{1}{2} АБ \times АЕ + \frac{1}{2} ВД \times АЕ$, (обштегъ чинителя єданпутъ поставляюћи) быва $АВДБ = (\frac{1}{2} АБ + \frac{1}{2} ВД) \times АЕ$.

201.

Слѣд. Просторъ површный трапезія две стране равнотекуће неимаюћегъ, т. є. трапезоіда, изнаћисе може, кадъ се површина триуглова оны', на коя се онай двоуголномъ дѣли, поособъ изнаће, и после собере.

202.

Наставл. *Површина полигона правилногъ равна є производу изъ полуомѣрія и отвѣсне, изъ средоточія нѣговогъ на ма кою страну нѣгову повучене.*

Доказат. Полигонъ правилный правима, изъ средоточія нѣгова на углове повученимъ, цепасе на триуглове равне подобне равнокраке, слѣдователно равно высоке, колико онъ страна има по § 145. ч. 3. фіг. 68., али површине свію овы' ф. 68. триуглова скупа равне су производу изъ полуомѣрія полигона и речене отвѣсне; єръ су равне производу изъ полусумме основица', коє са страна ма или омѣріємъ полигона судараюсе, и высине обште, коя є реченой отвѣсной равна; дакле површина полигона правилногъ равна є истоме производу.

203.

Слѣд. 1. Будући да є кругъ полигонъ правилный по § 183. ч. 1., у коме се отвѣсна, изъ средоточія на страну нѣгову спуштена, судара или слаже са полупречникомъ, *површина кругова равна є производу изъ полуокружія и полупречника нѣговогъ.* Дакле

2. Површина круга равна є такођеръ производу изъ цѣлогъ окружія и пола зрачца, или четврте части пречника.

3. За изнаћи моћи површину другогъ каквогъ полигона неправилногъ, нуждно є 1) полигонъ чрезъ двоуголне на триугле подѣлити: 2) овы' триуглова површине поособъ изнаћи: 3) ове површине све у сумму собрати.

204.

Задатакъ. *Изнаћи површину круга, кога намъ є пречникъ познатъ.*

Разрѣш. Да се изнађе окружіе, познатомъ пречнику соотвѣтствующій, у правой равноважной лініи посредствомъ отношенія међу пречникомъ и окружіемъ постоећегъ (§ 183.), половина оваковогъ исправљногъ окружія да се умножи са полупречникомъ, производъ одтудъ добывеный по-

желана є површина круга (§ 203. ч. 1.).

Ако бы имали н. п. пречникъ $= 200'$, тражено окружіе да буде $= x$; бы'ће

$100 : 314 = 200' : x$ (§ 183.),
или $1 : 314 = 2 : x$, (предид. дѣлећи чрезъ 100.)
одтудъ $x = 628'$, и одъ овога половина
$x = 314'$;
познатога пречника половина одъ $\frac{200'}{2} = 100'$,
слѣдователно изъ овога добивеный производъ
или тражена круга површина =
$314' \times 100 = 31400' \square$.

205.

Слѣд. 1. Ако бы се дакле површина или просторъ *абвд* Фіг. 95. међу два круга, одъ ф. 95.
кои' є єданъ у другомъ положенъ, наодећійсе изнаћи имао, површине оба круга поособъ опредѣлити треба, и маню одъ веће одузети.

2. Изъ опредѣлене и изнаћене површине круга, може се и површина свакога кругоизсѣчника изнаћи, ако є познато число степеній, коє кругоизсѣчниковъ лукъ има. У таковомъ случаю цѣло окружіє круга или 360° имаюсе на задатый кругоизсѣчника лукъ или овога степене, као што се има изнаћена површина круга на пожелану кругоизсѣчника површину, коя се изъ задата три члена лагко изнаћи може.

3. Одтудъ, кадъ се површина △ *АБМ* Фіг. ф. 96.
96. коя быва одъ кругоизсѣчника *АМБВА* тетивке *АБ* и зрачаца *МА*, и *МБ*, одъ цѣле кругоизсѣчника површине одузме, добыћесе такођеръ површина кругоодсѣчника *АБВА*.

4. И зато и друга ма каква површине кругова часть *ДЕКГД* или *КГХК* равнымъ начиномъ изнаћи се може, кадъ се површина кругоизсѣчника манѣгъ *ДЕСД* по числу предидућемъ овога §. изнаће, и одъ површине кругоодсѣчника већегъ *ГКЕСДГ* одузме; тако исто кадъ се површина кругоодсѣчника *ГКЕСДГ* одъ површине *ГХКЕСДГ* одузме.

206.

Задатакъ. *У равань квадратъ преобратити* 1) *свакій параллелограммъ:* 2) *тригаалъ:* 3) *кругъ.*

Разрѣш. 1) Изнаћи треба међу высиномъ и основицомъ датогъ параллелограмма средню геометрическу соразмѣрну; ова є страна пожеланогъ квадрата. 2) тако исто међу высиномъ и полуосновицомъ триугла да се изнаће средня соразмѣрна. 3) да се изнаће међу полупречникомъ и полуокружіемъ исправлѣнимъ (§ 183.) средня соразмѣрна, и надъ изнаћеномъ средньомъ соразмѣрномъ да се подигне по § 136. квадратъ; површина овога равна ће быти површини преобратитисе имаюће фігуре.

Доказат. 1) Да назначимо да є высина $= в$, основица $= о$, међу ове две средня соразмѣрна $= м$; быће за параллелограммъ

$$в : м = м : о,$$

$во = м^2$, или $во$ є површина задатога параллелограмма, а $м^2$ є квадратъ, коега є страна

средня соразмѣрна лінія међу высиномъ и основицомъ задатогъ параллелограмма: 2) за тригалъ быва

$$в : м = м : \frac{1}{2}о, \text{ одтудъ}$$

$$\frac{1}{2}ов = м^2;$$

али є $\frac{1}{2}ов$ површина триугла по § 195., а $м^2$ є површина квадрата, кога є $м$ средня соразмѣрна међу высиномъ и половиномъ основице задатога триугла:

3) Да назначимо зрачацъ $= р$, полуокружіє $= \frac{1}{2}п$, среднѣ соразмѣрну $= м$, бы'ће за кругъ

$$р : м = м : \frac{1}{2}п,$$

$$\text{одкудъ } \frac{1}{2}рп = м^2,$$

или површина круга = квадрату, коєга є страна среднѣ соразмѣрна међу полупречникомъ и полуокружіємъ; дакле.

Примѣчаніє. Кадъ се међу полупречникомъ и полуокружіємъ среднѣ соразмѣрна тражи, мора се найпре полуокружіє у равноважной правой лініи опредѣлити. Али то є познато, да оно пречника къ окружію отношеніє (§ 183.), средствомъ кога се лінія права окружію равноважна изтражує, строгости математической не одговара, дакле неће ни квадратъ, у кои се површина круга преобраћує, точно соотвѣтствовати (т. є. она славна квадратура круга), премда є ово тако мала погрешка, да се при обштемъ употребленію за уравнато узети може.

ГЛАВА ДЕСЕТА.

О МЕЂУСОБНЫМЪ ПОВРШИНА' ОТНОШЕНІЯМА.

207.

Наставл. *Површине триуглова имаюсе у отношенію сложеномъ высине и основице.*

Доказат. Да назначимо высине два триугла са B и b : основице са O и o : просторе површне Π и π; быће

$$\Pi = \tfrac{1}{2}OB$$

и $\pi = \tfrac{1}{2}ob$ § 195.

дакле $\Pi : \pi = \tfrac{1}{2}OB : \tfrac{1}{2}ob$,

и одтудъ $\Pi : \pi = OB : ob$,

али $OB : ob$, то є отношеніе сложено изъ просты' высина B и b, и основица' O и o отношенія; дакле.

208.

Слѣдства. 1. Дакле и површине паралелограмма имаюсе у отношенію сложеномъ высина и основица'. Єръ по задржаномъ предидућемъ наименованію, быва

$$\Pi = OB,$$

а $\pi = ob$,

тако $\Pi : \pi = OB : ob$. Одтудъ

2. Кадъ є у два параллелограмма $B = в$,
быва $П : п = O : о$,
а кадъ є $O = о$,
быва $П : п = B : в$;
ако ли є пакъ $OB = ов$,
быва $П = п$.

3. Ако су два параллелограмма у смотренію површина равна, ньове су высине са основицама обратно соразмѣрне, и напротивъ. У таковомъ є случаю

одтудъ $OB = ов$,
$B : в = б : Б$.

Напротивъ, ако є $B : в = б : Б$,
быва $OB = ов$.

Исто тако быва са триуглима.

209.

Наставл. *Површине триуелова подобны имаюсе у отношенію удвоєномъ свакe стране соотвѣтственне.*

Доказат. Пошто се површине триуглова имаю у смотренію сложеномъ высина и основица § 207., кадъ се изъ триуглова $АБВ$ и $абв$ Фіг. 97. ф. 97. подобны вр'ова или равны углова $А$ и $а$ на основице $БВ$ и $бв$ спусти отвѣсна $АД$ и $ад$, быва

$$\triangle АБВ : \triangle абв = АД \times БВ : ад \times бв,$$

али отношеніе $АД : ад = БВ : бв$;

єръ у триуглима подобнима $АБВ$ и $абв$ быва

$АБ : аб = БВ : бв$ по § 162.,

а у $\triangle$ *АДБ* и $\triangle$ *адб* подобнима, быва

$$АБ : аб = АД : ад,$$

дакле и $$АД : ад = БВ : бв,$$

слѣдовательно кадъ се ово отношеніе *БВ : бв* на мѣсто *АД : ад* у првой соразмѣрности постави, быва

$$\triangle АБВ : \triangle абв = БВ \times БВ : бв \times бв = БВ^2 : бв^2,$$ и т. д.

210.

Слѣдства. 1. Површине параллелограмма подобны' такођеръ имаюсе у отношенію удвоєномъ сваке стране соотвѣтственне, или имаюсе као квадрати сваке стране соотвѣтственне. Єръ су триуглови подобни као половине параллелограмма подобны', али се цѣла имаю као половине; дакле. И

2. површине полигона подобны' имаюсе у отношенію удвоєномъ (или као квадрати) сваке стране соотвѣтственне. Кадъ се полигона подобна двоуголнима изъ равны' углова на супротне повученыма на триуглове подобне дѣле § 154. бы'ће у фіг. 75.

ф. 75.

$$\triangle ЕАД : \triangle еад = ЕА^2 : еа^2,$$

и $$\triangle АДБ : \triangle адб = АБ^2 : аб^2,$$

и $$\triangle БДВ : \triangle бдв = БВ^2 : бв^2 \quad (§\ 208.)$$

одтудъ $$\triangle ЕАД + АДБ + БДВ : еад + адб + бдв = ЕА^2 + еа^2,$$ или $$= АБ^2 : аб^2$$ и т. д.

3. Површине полигона правилны' подобны' имаюсе у отношенію удвоєномъ (или као квадра-

ти) полупречника или пречника кругова описаны'. Поєдине стране соотвѣтственне ованови' долигона имаюсе као полупречници или пречници кругова описаны' § 182., али § 210. ч. 2; дакле.

4. Површине кругова, кои такођеръ къ полигонима правилнима, подобнима принадлеже, имаюсе као квадрати полупречника или пречника.

211.

Наставл. *Квадратъ ипотенузе равнъ є сумми квадратной оба катета.*

Доказат. Ако се надъ странама тріугла десноуголногъ *АБВ* Фіг. 98. подигну квадрати *М, Н, О*, бы'ће квадратъ ипотенузе *О* равнъ оба катета квадратима $М + Н$, или $БВ^2 = АБ^2 + АВ^2$. Єръ у $\triangle$ *АБВ* десноуголномъ по спуштеной отвѣсной *АГ*, бы'ће $\triangle АБВ \sim АБГ$ по § 124., дакле бы'ће $БВ : АБ = АБ : БГ$ по § 162. *ф. 98.*

и одтудъ $БВ \times БГ = АБ^2$.

Равнимъ начиномъ $\triangle АБВ \sim \triangle АГВ$;

дакле быва $БВ : АВ = АВ : ГВ$,

и одтудъ $БВ \times ГВ = АВ^2$.

Тако ћемо добыти ова два уравненія

$$БВ \times БГ = АБ^2$$

$$\text{и } БВ \times ГВ = АВ^2$$

собраніемъ $БВ \times БГ + БВ \times ГВ = АБ^2 + АВ^2$,

или $БВ \times (БГ + ГВ) = АБ^2 + АВ^2$; (обштегъ чинит.)

али кадъ є $БГ + ГВ = БВ$, на мѣсто равны'

поставляюћи, быва $БВ \times БВ = БВ^2$;

дакле $БВ^2 = АБ^2 + АВ^2$.

212.

Слѣд. Квадратъ свакога катета равањ е квадрату ипотенузе по одузетомъ другога катета квадрату.

213.

Наставл. *Ако се надъ странама триугла* ф. 99. *десноугловогъ* $АБВ$ Фіг. 99. *подигну фіеуре подобне, бы'ће фіеура ипотенузе* $О$ *равна фіеурама оба катета* $М + Н$.

Доказат. Єръ се $О : М + Н = БВ^2 : АБ^2 + АВ^2$ (по § 210. ч. 2.),

али $БВ^2 = АБ^2 + АВ^2$ по § 210.;

дакле $О = М + Н$.

214.

Наставл. *Ако се надъ странама триугла* ф. 100′. *десноугловогъ* $АБВ$ Фіг. 100′. *назначе полуокружія, бы'ће мѣсечићи* $О$ *и* $Н$ *Ипократови равни истоме триуглу десноугловомъ.*

Доказат. Єръ полукругъ надъ ипотенузомъ назначенъ $я + \triangle АБВ + ю = о + я + н + ю$ полукруговима оба катета (§ 213.); дакле и $я + ю$ изъ оба члена уравненія одузимаюћи

$$\triangle АБВ = О + Н.$$

ОДДѢЛЕНІЄ ДРУГО.

ТРИГОНОМЕТРІЯ ПОВРШНА.

215.

Изяснен. Триугалъ свакій, као што се на овомъ мѣсту сматра, изъ шестъ частій состоисе, т. є. изъ три стране, и толико углова, одъ коих кадъ се изъ три задаты частій, остале три траже, триугалъ *разрѣшити* зовесе, и часть Землмѣрія ова разрѣшенія учења, зовесе *Тригономе-трія* (Триугломѣріє), и она є *површна* или *шарна* (§ 2.). Мы ће мо дакле површну овде изложити.

216.

Слѣд. Оне три задате триугла части, изъ коих се остале три тражити имаю, союзъ некій и отношеніє са овыма трима имати мораю.

217.

Наставл. *Стране триугла нису соразмѣрне углови супротнимъ.*

Доказат. Кадъ бы стране триугла угловима супротнима соразмѣрне быле, стране бы морале у ономъ истомъ отношенію са угловима супротнима растити, но ако стране триуглова онда кадъ углови увеличаваюсе и расту, алъ нерасту у равномъ отношенію са угловима супротнимъ. Єръ кадъ бы стране у равномъ отношенію са угловима супротнимъ растле, морале бы се оне, кадъ се угалъ удвои, такођеръ удвоити, и обратно кадъ се страна удвои, морао бы се и угалъ супротный удвоити, али кадъ се страна удвои, угалъ супротный неудвоявасе. Єръ да предпо-
ф. 100. ставимо, да є у $\triangle$ *АБВ* фіг. 100., кои да се опише окружіємъ, страна *ВА* = полупречнику, слѣдователно = страни шестоугла правилногъ, лукъ *АВ* има ће 60° § 148. ч. 2., и зато угалъ *АБВ*, коега є мѣра половина лука *АВ* (§ 80.) имаће 30 степеній; ако се дакле увелича страна *АВ* = полупречнику іошть єданпутъ т. є. да буде = *ВД* пречнику, променућесе угалъ *АБВ* у угаль *ДБВ*, али угалъ овай *ДБВ* као десанъ (по § 81. ч. 2.), и тако = 90°, страни є *ДВ* удвоєной супротанъ, па ніє удвоєнъ, но утроєнъ угла *АВВ* 30°; дакле кадъ се страна удвои, угалъ супротный не увеличавасе удвоєно; дакле стране триугла не расту са угловима равнымъ отношеніємъ; дакле.

218.

Слѣд. Да бы дакле изъ углова стране триугла, и обратно изъ страна углове средствомъ

соразмѣрности изнаћи могли, нуждно є онакова количества или праве лініє угловима поставити, коє у рачуну углове представляю, и коєће странама углова супротнимъ соразмѣрне быти.

219.

Изяснен. Оне праве лініє, коє углове у рачуну представляю, и коє су угловима супротнимъ соразмѣрне, зато, што углове замѣняваю, зовусе *лініє тригонометрическе* или *дѣйства углова* (functiones). Овакове су лініє I. *Нѣдриште* (sinus), II. *Сонѣдриште* (cosinus), III. *Дирка* (tangens), IV. *Судирка* (cotangens), V. *Сѣчица* (secans), VI. *Сусѣчица* (cosecans).

I. НѢДРИШТЕ.

220.

Изясн. *Нѣдриште*, или *нѣдриште право* (sinus rectus) угла *ДВА* фіг. 101. или лука *ДА*, ф. 101. угалъ *ДВА* мѣрећегъ, зове се она лінія отвѣсна *ДЕ* изъ ма коє крайнѣ лука *АД* точке *Д* (или *А*) на полупречникъ спуштена. Оно стране или полупречника *АВ* одсѣчіє *ЕА*, коє се међу нѣдриштемъ и лукомъ налази, зовесе *нѣдриште обратно* истога лука или угла.

221.

Слѣд. Лукъ дакле $АД$ ма каквымъ већимъ или маньимъ полупречникомъ може быти назначенъ.

222.

Наставл. *Нѣдриште є половина тетивке удвоєногъ лука.*

ф. 101. Да буде лукъ $АД$ фіг. 101. мѣра угла $АВД$, бы'ће Нѣдр. $ДЕ = \frac{1}{2} ДК$.

Доказат. Тетивка $ДК$ полупречникомъ $ВА$ двопресецасе (§ 65.), дакле є $ДЕ = ЕК$, али $ДЕ =$ половини одъ $ДК$; дакле.

223.

Задатци: 1. *Изнаћи нѣдриште* 30°.

Разрѣш. По § 222. Нѣдр. $ДЕ = \frac{1}{2} ДК$, али $ДК$ овде равно є страни шестоугла правилногъ или полупречнику § 148. ч. 2.; дакле $\frac{1}{2} ДК = \frac{1}{2}$ зрачцу. Поставляюћи зрачацъ $= 1$, бы'ће Нѣдр. $30° = \frac{1}{2}$.

2. *Изнаћи Нѣдриште* 45°.

Разрѣш. По § 222. Нѣдр. $ДЕ = \frac{1}{2} ДК$, али є садъ $ДК$ ипотенуза у $\triangle ДВК$, али по § 211. $ДК^2 = ДВ^2 + ВК^2$;

извлачећи коренъ $ДК = \sqrt{ДВ^2 + ВК^2}$; али на мѣсто $ДВ^2 + ВК^2$ єръ су зрачци, поставляюћи єдиницу, быва $ДК = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; дакле $ДК$ половина или Нѣдр. $45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

3. *Изнаћи Нѣдриште* **18^v.**

Разрѣш. По § **222.** Нѣдр. $ДЕ = \frac{1}{2} ДК$; али садъ є $ДК =$ страни десетоугла правилногъ, а ова є $=$ већемъ одсѣчію полупречника средњимъ и крайњимъ отношеніемъ сѣченогъ, а полупречникъ средњимъ и крайњимъ отношеніемъ овако се сѣче: Предпоставляюћи да є већа часть зрачца $= x$,

быва $1 : x = x : 1 - x$; одтудъ

$x^2 = 1 - x$, у редъ поставляюћи

$x^2 + x = 1$, попуняваюћи другимъ членомъ

$x^2 + x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$, извлаченѣмъ корена

$x + \frac{1}{2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}}$, скраћиваюћи.

$x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$, изъ именит. 4 извлачећи $\sqrt{}$

$x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, премештаюћи

$x = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} = ДК$;

али Нѣд. $18^v = \frac{1}{2} ДК$; дакле Нѣд. $18^v = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

$= \frac{1}{4}\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})}$.

II. СОНЋДРИШТЕ.

224.

Изяснен. *Сонѣдриште* (cosinus) зовесе она часть зрачца, коя се налази међу угла нѣдриштемъ $ДЕ$ фіг. **101.**, и нѣговымъ ошилѣмъ B. Или фіг. **101.** фіг. **102.** будући да є $ДК = EC$, то є EC Сонѣдриште лука $АД$. Будући да є Сонѣдриште EC катетъ у $\triangle ЕСД$, може се по § **211.** изнаћи:

$ДС^2 = ЕС^2 + ЕД^2$, премештаюћи $ЕД^2$

$ДС^2 - ЕД^2 = ЕС^2$, извлаченћмъ $\surd$

$ЕС = \surd\overline{ДС^2 - ЕД^2}$, поставляюћи вредность

Сонћд. угл. $x = \surd\overline{1^2 - \text{Сон. } x^2}$.

225.

Задатци. 1. *Изнаћи Сонћдриште* 30^v.

По § 224. Сонћд. $30^v = \surd\overline{1^2 - (\frac{1}{2})^2}$,

подизаюћи на квадратъ Сонћдр. $30^v = \surd\overline{1 - \frac{1}{4}}$,

єдиницу приводећи у разб. Сонд. $30^v = \surd\overline{\frac{4}{4} - \frac{1}{4}}$,

отятіемъ Сонд. $30^v = \surd\overline{\frac{3}{4}}$,

изъ именителя 4. извлачећи $\surd$ Сонд. $30^v = \frac{1}{2}\surd 3$.

2. *Изнаћи Сонћдриште* 45^v.

По § 224. Сонћдриште $45^v = \surd\overline{1^2 - (\frac{1}{2}\surd 2)^2}$,

подизаюћи на квадратъ, Сонд. $45^v = \surd\overline{1 - \frac{1}{4}2}$,

умноженіе свршиваюћи, Сонд. $45^v = \surd\overline{1 - \frac{2}{4}}$,

єдиницу у разбіеніе преобраћиваюћи Сонд. $45^v = \surd\overline{\frac{4}{4} - \frac{2}{4}}$,

отятіемъ Сонд. $45^v = \surd\overline{\frac{2}{4}}$,

изъ именителя извлачећи $\surd$ Сонд. $45^v = \frac{1}{2}\surd 2$

3. *Изнаћи Сонћдриште* 18^v.

По § 224. Сонћдриште

$$18^v = \surd\overline{1^2 - \left(\frac{1}{4}\surd\overline{6 - 2\surd 5}\right)^2},$$

подизаюћи на квадр. Сонђд.

$$18^v = \sqrt{1 - 16\,(6 - 2\sqrt{5})},$$

именителя 16. подписиваюћи, Сонд.

$$18^v = \sqrt{1 - \frac{(6 - 2\sqrt{5}}{16}},$$

єдиницу у разбієніе преобраћив. Сонд.

$$18^v = \sqrt{\tfrac{16}{16} - \frac{(6 - 2\sqrt{5})}{16}}$$

знаке променюююћи, быва Сонд.

$$18^v = \sqrt{\frac{16 - 6 + 2\sqrt{5}}{16}},$$

или свршиваюћи, быва Сонд.

$$18^v = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}},$$

изъ именителя извлачећи $\sqrt{}$ Сонд.

$$18^v = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

III. ДИРКА.

226.

Изяснен. *Дирка* (tangens) зовесе она отвѣсна лінія изъ ма коелука крайнѣ точке подигнута, и до другога полупречника продужена, и у обштой точки удараня окончаваюћасе. Тако є н. п. угла *АВД* ф. 101. или нѣговогъ лука *АД*, *ф.* 101. дирка *АН*.

Дирка изнаћисе може или

α) по наставл. § 211. $HB^2 = AH^2 + AB^2$,

пренашаюћи AB^2 быва Дирк. $HB^2 - AB = AH^2$

извлачећи $\sqrt{}$ быва Дир. $\sqrt{HB^2 - AB^2} = AH$

поставляюћи вред. $\sqrt{}$ сћч. $x^2 - 1^2 =$ Дирк. угл x.

или β) по подобности триуглова, т. є. $\triangle HAB \sim \triangle DEB$,

$EB : AB = DE : HA$, одтудъ $AH = \frac{AB \cdot DE}{EB}$

поставляюћи вредность Дирк. уг. $x = \frac{\text{Нђдр. } x}{\text{Сонд. } x}$.

227.

Задатци. 1. *Изнаћи Дирку* 30^v.

По § 226. β) Дирк. $30^v = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$,

числит. и именит. съ 2. умножаваюћи Дирк. $30^v = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

„ „ „ съ $\sqrt{3}$ „ Дирк. $30^v = \frac{\sqrt{3}}{3}$

или Дирка $30^v = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

2. *Дирку* 45^v *изнаћи.*

По § 226. β) Дирка $45^v = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$.

3. *Изнаћи Дирку* 18^v.

По § 226. β) Дирка $45^v = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$;

Числит. и именит. умнож. са 4. $= \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$,

„ „ „ „ са $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$,

„ „ „ „ са $\sqrt{5-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{20-8\sqrt{5}}}{\sqrt{20}}$

„ „ „ дѣлећи чрезъ $\sqrt{4} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$

„ „ „ множећи са $\sqrt{5} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$

или Дирка $45^{0} = \frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$.

228.

Изяснен. Оштрій угалъ, кои или другоме додатъ, или одъ другога одузетъ, проузрокує, да другій изиђе десанъ, овде се зове *допуна* (complementum) или *угалъ допуне* (angulus complementi), и то у првомъ случаю зовесе *допуна по оскудости* (complementum per defectum), а у другомъ *допуна по изступу* (complementum per excessum) т. є. у смотренію оногъ другогъ угла, коій или оскудѣва до десногъ, или десанъ угалъ превозилази. Тако угалъ *ДСХ* фіг. 102., у смотренію угла *АСД* као до десногъ допунитисе имаюћегъ, зовесе допуна по оскудости; єръ углу *АСД* до деснога *АСХ* оскудѣва угалъ (кои га фіг. 102.

допунити има) *ДСХ*. Тако є исто угалъ *ДСХ* у смотренію тубогъ угла *БСД* допуна по изступу; єръ угалъ *БСД* превазилази десанъ количествомъ угла *ДСХ*. — Нђдриште угла допуне *ДСХ*, коє є *ДК* у смотренію допунитисе имаюћегъ угла *АСД*, зовесе *сонђдриште*; дирка *ЛХ* зовесе *судирка*; сѣчица *НС сусѣчица*; а нђдриште обратно *ХК сонђдриште обратно*.

IV. СУДИРКА.

229.

Изясн. *Судирка* є дирка угла допуне (§ 228.). Изнаћи се може изъ подобности триуглова, т. є.

ф. 102. *α)* $\triangle ЛХС \sim \triangle ЕДС$ Фіг. 102.

$$ДЕ : ЕС = ХС : ЛХ,$$

поставляюћи Тригонометр. вредности

$$\text{Нђд. уг. } x : \text{Сонђд. } x = 1 : \text{Суд. } x;$$

$$\text{и Судирка угл. } x = \frac{\text{Сонђд. } x}{\text{Нђд. } x}. \quad \text{Или}$$

β) Слђдствомъ § 211. $ЛС^2 = ЛХ^2 + ХС^2$,

премештаюћи $ЛХ^2$ быва, $ЛС^2 - ЛХ^2 = ХС^2$,

извлачећи $\sqrt{\ }$ $\sqrt{ЛС^2 - ЛХ^2} = ХС$,

поставляюћи тригон. вредности. $\sqrt{\text{Сонд. } x^2 - 1^2} = \text{Суд. } x.$ Или

γ) изъ подоб. триуглова овы' $\triangle ЛХС \sim \triangle НАС$;

$$АН : ХС = АС : ЛХ,$$

поставл. вред. тригон. Дирк. $x : 1 = 1 : \text{Суд. } x$,

$$\text{одтудъ Суд. угл. } x = \frac{1^2}{\text{Дир. } x}.$$

230.

Задатци. 1. *Изнаћи Судирку* 30^v.

По § 229. *α)* Судирка $30^v = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}$;

числит. и именит. множећи са 2 быва $= \sqrt{3}$.

2. *Изнаћи Судирку* 45^v.

По § 229. *α)* Судирка $45^v = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$.

3. *Изнаћи Судирку* 18^v.

По § 229. *α)* Судирка $18^v = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$;

Числ. и именит. са 4 множ. и

„ „ „ чрезъ $\sqrt{2}$ дѣлећи $= \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}$,

„ „ „ са суммомъ $= \frac{\sqrt{20+8\sqrt{5}}}{\sqrt{4}}$

или $= \frac{\sqrt{20+8\sqrt{5}}}{2}$,

разправляюћи на чинит. быва $= \frac{\sqrt{4.5+2.4\sqrt{5}}}{2}$

$= \frac{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$.

и чрезъ 2 дѣлећи $= \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

V. сѣчица.

231.

Изяснен. *Сѣчица* є полупречникъ, кои продженъ са диркомъ ударасе и у обштой удараня точки окончавасе. Тако є лука *АД* фіг. 102. сѣчица *НС*. — Изнаћисе може или

ф. 102.

α) по § 211. т. є. $HC^2 = AC^2 + AH^2$;

$$HC = \sqrt{AC^2 + AH^2},$$

поставляюћи тригоном. вредности Сѣчица уг. x $= \sqrt{\text{Дир. } x^2 + 1^2}$. Или

β) изъ подобн. триуглова, т. є. $\triangle HAC \sim \triangle DEC$,

$$EC : CД = AC : CH,$$

постав. триг. вред. Сонѣд. $x : 1 = 1 :$ Сѣч. x, одтудъ

$$\text{Сѣчица угл. } x = \frac{1^2}{\text{Сонѣд. } x}$$

232.

Задатци. 1. *Изнаћи Сѣчицу угл.* 30°.

По пред. § *β*) Сѣчица $30^\circ = \frac{1^2}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$;

Числ. и имен. множ. са $2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

„ „ „ „ са $\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

2. *Изнаћи Сѣчицу* 45^v.

По § 231. β) Сѣчица $45^v = \frac{1^2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$;

Числ. и именит. множ. са $2 = \frac{2}{\sqrt{2}}$,

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

3. *Изнаћи Сѣчицу* 18^v.

По § 231. β) Сѣчица угла $18^v = \frac{1^2}{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$;

Числителя и имен. множећ. { са 4, быва $= \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

са разликомъ $= \frac{4\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}}$,

чрезъ $\sqrt{2}$ дѣлећи $= \frac{4\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{40}}$,

са $\sqrt{40} = \frac{4\sqrt{200-40\sqrt{5}}}{40}$,

чрезъ 4 дѣлећи $= \frac{\sqrt{200-40\sqrt{5}}}{10}$

разправляюћи на чинителѣ $= \frac{\sqrt{4.50-4.10\sqrt{5}}}{10}$,

$$= \frac{2\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10},$$

числ. и имен. чрезъ 2 дѣлећи $= \frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{5}$

$= \frac{1}{5}\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$.

VI. сусѣчица.

233.

Изяснен. *Сусѣчица* є угла допуне, сѣчица § 228. изнаћисе може α) по § 211 $AC^2 = XC^2 + XA^2$;

$AC = \sqrt{XC^2 + XA^2}$,

поставляюћи тригон. вредности Сонѣд. угл. x $= \sqrt{\text{Суд. } x^2 + 1^2}$; или

β) Изъ подоб. триуглова овы' $AXC \sim HAC$;

$AH : HC = XA : AC$,

поставляюћи тригонометрическу вредность быва;

Дирк. X : Сѣч. $X = 1$: Сус. X; одтудъ Сусѣчица $X = \frac{\text{Сѣч. } X}{\text{Дирк. } X}$. или

γ) Изъ подоб. триуглова овы' $AXC \sim DEC$.

$DE : DC = XC : AC$,

постав. триг. вред. Нѣд. $X : 1 = 1$: Сусѣч. X,

одтудъ Сусѣчица $X = \frac{1^2}{\text{Нѣд. } x}$.

234.

Задатци. 1. *Изнаћи Сусѣчицу* 30°.

По предид. § $\gamma) = \frac{1^2}{\frac{1}{2}} = 2$.

2. *Изнаћи Сусѣчицу* 45°.

По предид. § γ) $= \sqrt{2}$.

3. *Изнаћи Сусѣчицу* 18°.

По предид. § γ. Сусѣчица $18^\circ = \dfrac{1^2}{\frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$;

$$= \frac{4}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}},$$

множећи са суммомъ $= \dfrac{4\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{16}}$,

$$= \frac{4\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4},$$

и $= \sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

235.

Наставл. *Колико годь є већій уѓалъ оштрій или лукъ одъ* 1 *до* 90 *степенїй, сотымъ су већа нѣгова дѣйства: а штогодь већій буде уѓалъ тубый или лукъ одъ* 90° *до* 180°, *сотимъ су маня нѣгова дѣйства.*

Доказат. *БФ* фіг. 103. нѣдруште є угла *АМН*, или лука *БН*, а тако є *СГ* нѣдриште оштрогъ угла манѣгъ *СМН*, али є *БФ* веће одъ *СГ* и то количествомъ *Бо*, єръ, ако се преко *С* повуче равнотекућа *СІ* на *НМ*, у параллелограмму *Со ФГ* быће $СГ = оФ$ (§ 51.); тако исто дирка $НЛ > НК$ (као оне часть), и сѣчица $МЛ > МК$ (єръ

ф. 103.

є *МЛ* страна найдужа у △ *МЛК* као супротна углу *ЛКМ* тубомъ збогъ нѣговогъ доугла *МКН* оштрогъ, у △ *КМН* десноуголномъ положеногъ § 56. 118.); и тако є дакле прва часть ясна. Да бы и другу часть овога наставленія доказали, узимамо два угла туба *ЕМБ* и *ЕМС*, и за израженіе ньіовы дѣйствія, изъ двею крайньи' точкій лукова *ЕАБ*, и *ЕАБС* изабрали смо точку *Е*. Кадъ се изъ лука *БАЕ*, мѣре угла тубогъ *ЕМБ*, крайнѣ точке *Е* спусти лінія отвѣсна *ЕП* на страну *БМ* (кои на противну страну продужитисе мора до *Ж*), бы'ће *ЕП* истога лука *ЕАБ*, или угла *ЕМБ* нѣдриште; ако се изъ *Е* подигне отвѣсна *ЕЖ*, бы'ће *ЕЖ* дирка, а *МЖ* сѣчица; а тако исто већега угла тубогъ *ЕМС* или нѣговогъ лука *ЕАБС*, нѣдриште є *Ен*, дирка є *ЕР*, а сѣчица *МР*, али є $Ен < ЕП$, $ЕР < ЕЖ$, а $МР < МЖ$ (збогъ угла *МРЕ* оштрогъ у △ *МЕР* кодъ *Е* десноуголногъ нѣковъ є доугалъ *МРЖ* тубый, дакле у △ *МРЖ* страна є $МЖ > МР$); дакле.

236.

Слѣд. Нѣдриште право *АМ* угла десногъ *АМН* равно є полупречнику, и одъ свію нѣдришта правы' є найвеће. Єръ лінія отвѣсна, изъ лука *АБСН* крайнѣ точке *А* на страну *МН* спуштена, слажесе са полупречникомъ *АМ*, и тако нѣму равна; но и већа є количествомъ *АХ*, одъ найближегъ нѣдришта *БФ*, слѣдователно веће

одъ свію остали, кое се види, кадъ се на *НМ* преко *Б* (и преко *С*) повуче $\#$ *БХ*. Тако исто нѣдриште обратно *МН* угла десногъ равно є полупречнику, а дирка и сѣчица, као равнотекуће, нигди се не састаю, ма безконечно да се продуже, и одтудъ се као безконечне сматраю.

237.

Наставл. *Упоредни угли имаю равна тригонометрическа дѣйства.*

Доказат. Да узмемо два упоредна угла *БМН* и *БМЕ*. Нѣдриште угла *БМН* быће *БФ*, *НЛ* є дирка, а *МЛ* сѣчица, али ако се изъ лука *БАЕ* крайнѣ точке *Б* (обоимъ луковима обште) спусти на страну *ЕМ* (продужену) отвѣсна *БФ*, быће *БФ* и угла *БМЕ* нѣдриште, као што є очевидно, слѣдователно упоредны углова нѣдришта су равна. Ако ли се пакъ изъ истога лука *БАЕ* друге крайнѣ точке *Е* на страну супротну *БМ* до *Ж* продужену, спусти отвѣсна *ЕП*, а друга изъ точке *Е* отвѣсна *ЕЖ* на *ЕМ*, быће *ЕП* нѣдришта, *ЕЖ* дирка, *МЖ* сѣчица угла *БМЕ*, али $ЕП = БФ$, $ЕЖ = НЛ$, а $МЖ = МЛ$. Єръ $\triangle ЕПМ \cong \triangle БФМ$ због равны углова очелны при *М*, при *П* и *Ф* десны, и због стране $МЕ = МБ$; и $\triangle ЕЖМ \cong \triangle НЛМ$ такођеръ због равны углова очелны *М*, због *Е* и *Н* десны, и због стране $МЕ = МН$; дакле соотвѣтственне овы триуглова, слѣдователно и изложена упоредны углова дѣйства међусобно равна су.

238.

Слѣдства. 1. Два лука кои одъ 90° равноотстоє, єданъ по изступу, а другій по оскудости, имаю она иста нѣдришта.

2. Лукъ, кои 180° превозилази, има оно исто нѣдриште, коє има лукъ онай, коимъ оне 180° превазилази.

3. Лукови, кои одъ 180° равноотстоє, имаю нѣдришта равна.

4. Лукъ, кои одъ 360° оскудѣва, има оно исто нѣдриште, коє има лукъ онай, коимъ одъ 360° оскудѣва.

ф. **103.** **5. Кадъ лукъ *НБ* фіг. 103 расте, увеличавасе нѣдриште (§ 235). Лука 90° нѣдриште равно є полупречнику или *АМ*. Кадъ лукъ преко 90° расте, нѣдриште опада; нѣдриште лука 180° = *О*. У трећемъ четврту растећимъ луковима, расте и нѣдриште, докъ опетъ лукъ 270° раванъ буде полупречнику. Напоследку у четвртомъ четврту растећимъ луковима, нѣдришта опадаю, докъ опетъ лука 360° нѣдриште равно буде *О*. Будући да нѣдришта у трећемъ и четвртомъ четврту подъ пречникъ *ЕД* падаю, слѣдователно на противну страну, зато, ако нѣдришта у првомъ и другомъ четврту узмемо положителна, быће у трећемъ и четвртомъ отрицателна. н. п. лукъ 30° и 210° имаю єдно нѣдриште = $\frac{1}{2}$, али Нѣдр. 30° = + $\frac{1}{2}$, а Нѣдр. 210° = — $\frac{1}{2}$.**

6. Кадъ лукъ расте, сонѣдриште опада: Сонѣдриште $90^v = 0$; Сонѣдр. $180^v = 1$; Сонѣдр. $270^v = 0$; Сонѣдр. $360 = 1$. Сонѣдришта су у првомъ и четвртомъ четврту положителна, а у другомъ и трећемъ отрицателна. Одтудъ лукови, кои одъ 90^v ровно оскудѣваю, єданъ по оскудости, а другій по изступу имаю она иста т. є. равна сонѣдришта по величини, но разна по знацыма. Одтудъ и лукъ, кои одъ 180^v оскудѣва, има оно исто сонѣдриште, коє има лукъ, коимъ одъ 180^v оскудѣва, и то како по величини, тако и по знаку, то єсть отрицателно. Дакле Сонѣд. $90^v = 0$; Сонѣдр. $180^v = -1$; Сонд. $270^v = 0$; Сонд. $360^v = +1$.

7. Дирка и судирка., сѣчица и сусѣчица у првомъ и трећемъ су четврту положителне, а у другомъ и четвртомъ отрицателне. Дирка и Сѣчица $90^v = \infty$; Дирка и Сѣчица $180^v = 0$; Дирка и Сѣч. $270^v = \infty$; Дирка, и Сѣч. $360^v = 0$. А кодъ Судирке и Сусѣчице обратно є.

239.

Наставл. *Лініє Тригонометріческе лукова подобныі имаюсе као полупречници* Фіг. 104. *ф.* 104.

Доказат. Лукъ $AX \sim$ луку и $\alpha\eta$ дакле и

$\triangle ДЕС \sim \triangle \delta\epsilon C$, слѣдователно

$СД : С\delta = ДЕ\ \delta\epsilon$,

$= ЕС : \epsilon C$;

и $\triangle$ *ГАС* $\sim$ $\triangle$ $y\alpha C$, слѣдователно быва

$$СД : С\delta = АГ : \alpha y$$
$$= ГС : yC;$$

и $\triangle$ *ЛХС* $\sim$ $\triangle$ $\lambda\eta C$, слѣдователно быва

$$СД : С\delta = ЛХ : \lambda\eta$$
$$= ЛС : \lambda C;$$ дакле.

240.

Слѣдства. 1. Ако се оба полупречника $C\alpha$ и CA на оно исто число частій подѣли (коє у већемъ полупречнику слѣдователно само ће веће бити, а у манѣмъ, манѣ величиномъ, али числомъ равне), свака ће лінія Трогонометрическа къ луку $\alpha\delta$ принадлежећа толико имати частій одъ своґъ полупречника δC, колико лінія равноимена къ луку $АД$ принадлежећа одъ своґа полупречника $ДС$.

2. Отношеніе сваке лініе Тригонометрическе къ полупречнику зависи само одъ величине угла $АСД$ (§ 27.), совршена пакъ величина ньіова зависи одъ величине полупречника. Ако се дакле полупречникъ, быо онъ великій или малый, на исто число частій подѣли, свака ће лінія Тригонометрическа извѣсно неко оваково число частій имати, коє число само одъ угла зависи, и коє свагда и при продуженомъ полупречнику оно исто остає, н. п. ако се свакій полупречникъ или великій или малый числомъ 100 назначи, быће угла 30^0 Нѣдрите $= 50$.

241.

ПРАКТІЧЕСКО ОСНОВОПОЛОЖЕНІЄ.

Ако се полупречнику извѣстно чисто частій припише, изнаћи, колико таковы частій свакой одъ горе изложены лінія тригонометрически за свакій лукъ припадаю.

Ово се опредѣлити може помоћію Маѳематіке вышше, и наша ће дужность быти опредѣлене и сочинѣне већъ одъ паметны мужева таблице, научити употреблявати. Овакове таблице съ великимъ трудомъ сочинѣне издали су на светъ неки паметни мужеви, као Неперъ; Бриггъ; Іоахімъ Рети, Францъ Карлъ Шулцъ, и Георгій Вега. У овима таблицама полупречникъ = 10.000,000.000 частій, а нѣговъ Логаритамъ = 10 быти мора. У простимъ изданіяма последнѣ су три цыфре изостављене, и тако є зрачацъ = 10,000.000. а логаритми непремѣнни оставлѣни су, као што є при концу овога дѣла такова таблица приключена.

242.

Слѣд: У таблицы овой приключеной изнаћи можемо свакога угла 1 до 90° надлежно число оны частій, одъ кои се 10,000.000 полупречнику приписую, колико одъ овы свакой лініи Тригонометрической принадлеже. Одъ 1 до 90°

зато, што после 90° степени она се дѣйства повраћаю (§ 237.). У овой таблицы у првомъ разреду налазесе степени и минута углова: у другой истимъ угловима припадаюћа нѣдришта: у трећой дирке: у четвртой логаритми диркій: у петой логаритми нѣдришта. Логаритми сѣчица изостављени су (што се безъ њи пословати може). Таблица є ова тако уређена, да на првой т. є. левой страни наодесе углови оштри са њіовима дѣйствіяма, и овыма припадаюћи логаритми, а на десной страни налазесе углова допуне т. є. тубогъ угла степени, са њиовыма дѣйствіяма, и овима припадаюћи логаритми. Какогодь што на левой страни углови одъ *O* до 90° редомъ расту, тако на десной страни одъ 90° — 45° опадаю тако, да се међусобно до десногъ угла допуняваю.

243.

Задатакъ. *Пожелано дѣйство задатогъ угла у таблицы изнаћи.*

Разрѣшеніе. 1. Ако задатъ угалъ десанъ не превозилази, треба тражити задатъ угалъ (т. є. нѣгове степене у првомъ разреду леве или десне стране, као што већій или маньій буде одъ 45°, соотвѣтствоваће нѣму у сосѣдномъ другомъ разреду нѣдриште: у трећой дирка: у четвртой и петой слѣдую логаритми дѣйствія; са стране пакъ противне у истой лініи соотвѣтствує у првомъ разреду допуна истога угла, после нѣдриште, дирка и логаритми.

2. Ако є задатъ угалъ одъ деснога већій или тубый, тай одузети валя одъ 180°, да бы нѣговъ доугалъ добыти могли, кои ако по предидућемъ начину у таблицы потражимо, наћи ћемо задатога угла дѣйствія. (§ 237.). Ако се тражи н. п. Нѣдр. угл. 125° : одузимаюћи 125° одъ 180°, и остатку 55°, или 54° 60′ да се изтражи принадлежеће Нѣдриште = 8191521, коє заєдно и задатомъ углу 125° припада (§ 237.).

3. Будући дасе у нашой овде при концу овога дѣла приключеной таблицы само свакій десетый минутъ изложенъ налази, па да бы и она изоставлѣны' минута дѣйствія изнаћи могли, слѣдуюћимъ начиномъ поступати треба : изнаћи треба у таблицы найближій већій и найближій маный угалъ (одъ задатога), одузети треба како найближій маный одъ найближегъ већегъ угла, тако и нѣдриште найближегъ манѣгъ угла одъ нѣдришта найближегъ већегъ угла и да се назначе ове две разлике; после да се одузме найближій маный угалъ табличный и одъ задатогъ угла, и да се сочини соразмѣрность ова: Као што се има прва разлика на другу, тако се има трећа на ону разлику, коіомъ нѣдриште датогъ угла превазилази нѣдриште найближегъ угла табличногъ. И кадъ се четврта изнаћена разлика дода къ нѣдришту угла найближегъ манѣгъ табличногъ, добыћесе пожелано нѣдриште.

Н. пр. Нѣдриште угла 60° 24′ изнаћи, кои се у нашой таблицы неналази. Зато 1) одузети треба найближій табличный угалъ 60° 20′ одъ найближегъ већегъ табличногъ угла 60° 30′; бы'ће прва разлика = 10. 2) одузети треба и найближегъ манѣгъ угла нѣдриште = 86891.96 одъ найближегъ већегъ угла нѣдришта = 87035.57. бы'ће друга разлика = 14361. 3) Одузети треба найближій маньій угалъ табличный 60° 20′ и одъ задатогъ угла 60° 24′, добыћесе разлика трећа. Одтудъ 4) да се сочини соразмѣрность

$$10 : 14371 = 4 : x$$

$$x = 5744\frac{4}{16}.$$

кадъ ову изнаћену четврту разлику = 5744 (пренебрегаваюћи разбієніе) къ угла найближегъ маньгъ нѣдришту = 86891. 96 додамо. т. є

$$\begin{array}{r} 86891.96 \\ + \quad 5744 \\ \hline \end{array}$$

добы'ћемо 8694940 = Нѣд. 60° 24′.

244.

Слѣд. Равнымъ начиномъ, као § пред. ч. 3. и логаритамъ надлежный нѣдришту или дирки изнаћисе може.

245.

Задатакъ. *Задатомъ дѣйствію надлежный угалъ у таблици наћи.*

Разрѣшеніе. 1. Задато дѣйство изнаћи треба у таблицы у надлежномъ разреду, одговараће му у првомъ разреду пожеланый угалъ, као и остала дѣйства у истой правой лініи у своима разредима.

2. Ако се небы задато дѣйство са свима своима цыфрама у тнблицы налазило, быо бы знакъ да угалъ осимъ степеный іоштъ и мінутій има. Да бы дакле и у овомъ случаю угалъ изнаћи могли, сочинити треба соразмѣрность као у § 243.

Н. п. Да се изнаће соотвѣтственный угалъ задатомъ нѣдришту 62615.03, кои се у таблицы нашой неналази. Зато изнаћи треба

нѣдр. најближе веће таблично = 62705.71
нѣдр. „ манѣ „ = 62478.85
кадъ се одузме = 22686 остат.;

равнымъ начиномъ одузети угалъ 38° 40′ најближомъ манѣмъ табличномъ дѣйству соотвѣтственный, одъ угла 38° 50′, најближемъ већемъ дѣйству или нѣдришту соотвѣтствующи, и остатакъ = 10′ да се забележи. Да се одузме далѣ

одъ задатогъ нѣдришта . . = 62615.03
најближ. манѣ таблично нѣдриште = 62478.85
= 136.18,

быће соразмѣность, 22686 : 10 = 13618 : x

одтудъ x = 6′ (разбіеніе пренебрегаваюћи) кадъ се изнаћены 6′ къ најближемъ манѣмъ углу 38° 40 додаду, добыћесе пожеланый угалъ = 38° 46.

3. Равнымъ начиномъ можесе изъ задатогъ логаритма, кои се у таблицы дѣйства са свима цыфрама точно небы налазіо, надлежно, дѣйство, и угалъ изнаћи.

О ТРИУГЛИМА ДЕСНОУГОЛНЫМЪ

246.

Задат. *Изъ задате ипотенузе и єдногъ катета углове изнаћи.* Или фіг. 105. изъ задате ипотенузе *ВД* и катета *ДЕ* углове изнаћи. ф. 105.

Разрѣш. Будући да є триугалъ десноуголанъ тога свойства, да кадъ се узме єданъ катетъ за полупречникъ, другій катетъ быва дирка, а ипотенуза сѣчица, а кадъ се узме ипотенуза за полупречникъ, єданъ катетъ быва нѣдриште, а другій сонѣдриште као што є очевидно изъ фігуре. Зато по § 239.

$$ВД : p^{*}) = \text{Нѣд. } ДЕ : \text{Нѣд. } ДВЕ.$$

Одтудъ $$ДВЕ = \frac{ДЕ}{ВД}.$$

А угалъ $ЕДВ = 90^{\circ} - ДВЕ.$

РАЗРѢШЕНІЄ ТРИУГЛА РАВНОКРАКОГЪ.

247.

Задатакъ. *У триугелу равнокракомъ изъ задатыі изнаћи непознате части.*

---

*) Подъ ‚p‘ разумеваћемо свагда полупречникъ.

Разрѣшеніе. Кадъ се у $\triangle$ *ЛМН* равнокра- *ф.* 106.
комъ фіг. 106. изъ вр'а нѣговогъ *М* на основицу *ЛН* спусти отвѣсна *МР*, бы'ће по § 222.

$$ЛР = \frac{1}{2} ЛН = \frac{1}{2} C;$$

дакле по § 246. $ЛМ : ЛР = 1 :$ Нѣд. *ЛМР*,

или $б : \frac{1}{2} C = 1 :$ Нѣд. $\frac{1}{2} u$; одтудъ

$$\text{I. Нѣд. } \frac{1}{2} u = \frac{\frac{1}{2} C}{б} = \frac{C}{2б}.$$

$$\text{II. } б = \frac{\frac{1}{2} C}{\text{Нѣд. } \frac{1}{2} u} = \frac{C}{2 \text{ Нѣд. } \frac{1}{2} u}.$$

$$\text{III. } \frac{1}{2} C = \frac{б \text{ Нѣд. } \frac{1}{2} u}{1}.$$

$$\text{IV. } C = 2б. \text{ Нѣд. } \frac{1}{2} u.$$

ГЛАВНА РАЗРѢШЕНІЯ ТРИУГЛОВА.

248.

Наставл. *У сваком'ъ тр'ицелу стране су у оном'ъ отношен'ію, у ком'ъ су нѣдр'ишта угл'ова истим'ъ странама супротна.* Или у $\triangle$ *АБВ* фіг. 107. стране имаюсе као нѣдришта углова *ф.* 107.
супротны'.

Доказат. $БВ : \frac{1}{2} БВ = АВ : \frac{1}{2} АВ$. Али $\frac{1}{2} БВ =$ Нѣд. уг. *А* (по § 222.), али $\frac{1}{2} АВ =$ Нѣд. уг. *Б*, дакле равна на мѣсто равны' у горньой соразмѣрности поставляюћи, быва $БВ :$ Нѣд. *А* $= АВ :$ Нѣд. *Б*.

249.

Слѣдство. Овымъ се начиномъ може свакій триугалъ разрѣшити; противуставляюћи странама нѣдришта, а нѣдриштама стране, коій се начинъ у тригонометріи зове *разрѣшеніе по противупоставляню.*

250.

Задат. *Изъ задаты страна АБ и БВ и изъ задатогъ угла єдной одъ задаты страна супротногъ А, изнаћи угалъ В,* Фіг. 108. ф. 108.

Разрѣш. По § 248. *БВ* : Нѣд. *А* = *АБ* : Нѣд. *В.* Но ако є страна *БВ* маня одъ стране *АБ,* изродиће се сумня, оће ли изнађеный угалъ *В* быти оштаръ као *АВБ,* или тубый као *АвБ;* єръ су како у △ *АБВ* тако и у △ *АБв* она иста условія, т. є. *АБ* страна обшта, а угалъ *А* обштій, далѣ страна *БВ* = страни *Бв.* Но у оваковомъ случаю съ друге стране познато быти мора, оће ли угалъ пожеланый *В* оштаръ или тубый быти.

251.

Слѣд. Ако ли є пакъ страна *АБ* Фіг. 109. ф. 109. задатомъ углу прилежећа маня одъ стране *БВ* задатомъ углу *А* супротне, свака сумня изчезава; єръ подъ овымъ предпоставлянѣмъ △ *БвА* нема иста условія она, коя △ *АБВ* има.

252.

Задатакъ. *Изъ задате суммe* C, *разлике* P *два количества непознатa* x *и* $ю$, *и самa количествa изнаћи.*

Разрѣш. Да назначимо Сумму $= C$, разлику $= P$, она два непозната количества x и $ю$, т. є. веће количество $= x$, а манѣ $= ю$.

дакле $C = x + ю$,

а $P = x - ю$

одтудъ $C + P = 2x$; и $x = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} P$.

Садъ намъ остає изнаћи количество манѣ или $ю$;

$$C = x + ю;$$

пренашанѣмъ $C - x = ю$

поставляюћи одъ x вредность $C - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2} P = ю$, назначено отятіє свршив. $\frac{1}{2} C - \frac{1}{2} P = ю$.

Ово се речма овако изговорити дає; *ако се къ полусумми дода полуразлика, добыћесе количество веће; а ако се одъ полусумме одузме полуразлика, добыћесе количество манѣ.*

253.

Наставлен. *Ако се у тригелу некомъ на страну найдужу спусти отвѣсна изъ гела супротногъ, има ће се найдужа страна къ сумми прочій двею страна, као што се има истій оны страна разлика, къ разлики одсѣчія найдуже стране.* **Или фіг. 110.** *ф.* 110.

$$БВ : АБ + АВ = АБ - АВ : ХБ.$$

Доказат. Ако се изъ ошиля угла *А* спусти на найдужу страну *БВ* отвѣсна *АХ*, и изъ *А* као средоточія найманьомъ страномъ $\triangle$ *АВВ*, *АВ* као полупречникомъ напише окружіе круга, а друга се страна продужи до *Ф*, быће *БВ* : *БФ* = *БМ* : *БН* (§ 171.), али ова соразмѣрность садржава у себи предидућу доказатисе имаюћу; єръ *БВ* є страна найдужа : *БФ* є сумма двею страна *АБ* + *АВ* збогъ *АВ* = *АФ*; *БМ* є ньіова разлика, єръ є ньіова разлика *АБ* — *АВ*, али є *АВ* = *АФ*; дакле є разлика *АБ* — *АФ* = *БМ*; *БН* є разлика одсѣчія найдуже стране, єръ є разлика *БХ* — *ХВ*, али *ХВ* = *ХН*; дакле є иста разлика и *БХ* — *ХН* = *БН*; дакле.

Примѣчаніе. По овомъ наставленію разрѣшаваюсе триугли, у коима су све три стране познате а ни єданъ угалъ, по соразмѣрности изнаћесе *БН*, и кадъ се ово одузме одъ стране *БВ*, изнаћесе *ВН*, а кадъ се ово чрезъ 2 раздѣли, добыєсе *ВХ*, коє ће кадъ се за полупречникъ узме *АВ*, быти Сонѣдриште угла *В*, тако се изнаће угаль *В*, па онда и остали.

254.

Наставл. *У сваком*ъ *триугл*у *имасе сумма даты*' *и познаты*' *двею страна к*ъ *ньіовой разлики, каогодь што се има дирка полусумме угелова, истима странама супротны*', *к*ъ *дирки полуразлике угелова ньіовы*'. Или фіг. 111. у $\triangle$ *АБВ*, фіг. 111.

$$АБ + АВ : АБ = \text{Дир. угл.}\frac{Б+В}{2} : \text{Дир. угл.}\frac{Б-В}{2}.$$

Доказат. Изъ A страномъ маньомъ AB да се напише окружіе круга, а страна $БA$ да се продужи до K, изъ K преко B да се повуче неопредѣлена KE, да се повуче далѣ изъ $Д$ до B тетивка $ДB$, на кою да се повуче $\#$ $БE$; быѣе како угалъ $ДBK$ тако и $БEK$ (§ 81. ч. 2.) десанъ, слѣдователно $\triangle$ $ДBK$ и $\triangle$ $БEK$ десноугли. Ово кадъ быва због $ДB \# БE$ у $\triangle$ $KБE$ соразмѣрность

$$БK : БД = EK : EB$$ (§ 157.), али

1. $БK$ є сумма даты и познаты двею страна $АБ + AB$, због $AB = AK$;

2. $БД$ є исты страна разлика; єръ због $AB = AД$ разлика є $АБ - AB = АБ - AД = БД$.

3. EK є дирка полусумме углова $Б + B$ (у датомъ $\triangle$ $АБB$) задатыма двема странама супротны; єръ уголъ KAB као споляшньій у смотрѣнію $\triangle$ $АБB$ раванъ є сумми углова супротны $Б + B$ (§ 121.), али уголъ $КДB = \frac{1}{2} KAB$ (§ 81. ч. 1.), дакле уголъ $КДB = \frac{A + Б}{2}$, али уголъ $КДB$ = углу $KБE$, дакле и уголъ $KБE$ = полусумми углова $Б + B$ у датомъ $\triangle$ $АБB$, али (кадъ се у $\triangle$ $KБE$ катетъ $БE$ узме за полупречникъ) EK є дирка угла $KБE$; дакле EK є дирка углова $\frac{A + Б}{2}$, датимь двема странама супротны.

4. EB є дирка полуразлике исты углова $Б$ и B; єръ кадъ се у датомъ $\triangle$ $АБB$ уголъ маньій $Б$ или $KБB$ одузме одъ $KБE$, коій има полусумму углова $Б$ и B (по доказателству), добыѣесе уголъ $BБE$

(као што є очевидно); дакле є угалъ *ВБЕ* полуразлика углова *Б* и *В*, али (узимаюħи катетъ *БЕ* за полупречникъ) быħе *ЕВ* дирка угла *ВБЕ*; дакле є *ЕВ* дирка волуразлике углова *Б* + *В*; слѣдовательно.

Примѣчаніе. По овомъ наставленію могу се триугли разрѣшити у ономъ случаю, кадъ намъ буду две стране са обуваħенымъ угломъ познате, тако се могу и остали углови изнаħи. Єръ кадъ се наħе дирка полуразлике углова, изнаħесе и угалъ полуразлике у таблицы, коій кадъ се наħе и къ углу познатомъ полусумме дода (§ 252.), добыєсе угалъ веħій *А*, а одтудъ и треħій *В*, и т. д.

УПОТРЕБЛЕНІЄ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКО-ЛОГАРИТМИЧЕСКЕ ТАБЛИЦЕ.

255.

Задатакъ. *Триугалъ десноугаоникъ АБВ, у комъ є н. п. страна АБ, и угалъ В* (а угалъ *Б* као десанъ познатъ є, и треħій *А* одма ħе се изнаħи) *задатъ, разрѣшити.* Фіг. 112. ф. 112.

Разрѣш. Начинъ разрѣшенія увидитисе може у § 246, но да бы ученицы и употребленіе тригонометрическо-логаритмическе таблице познали, наводимо овде примѣръ съ конечнымъ рѣшеніемъ. По задатку тражисе страна *БВ*, коя ħе се изъ слѣдуюħе соразмѣрности изнаħи; Нѣд. *В : АБ* = Нѣд. *А : БВ* по § 248; ако є стран

$АБ = 124^0$ (хватій), а угалъ $B = 50^v\ 40'$; бы'ће $A = 39^v\ 20'$ (по § 115. ч. 4), и предидућа соразмѣрность прелази у ову

$$\text{Нѣд. } 50^v\ 40' : 124^0 = \text{Нѣд. } 39^v\ 20' : БВ.$$

Садъ, кадъ изъ таблице угловима принадлежећа нѣдришта изтражимо, и у предидућу соразмѣрность на ньіово мѣсто поставимо, быва

$$7734716 : 124^0 = 6338309 : БВ.$$

Одтудъ се обичнымъ начиномъ $БВ$ као четвртый членъ изъ соразмѣрности изнаћи може, но за избећи при многомъ множеню и дѣленю погрешке, употребляюсе логаритми. Ако се дакле надлежни логаритми изъ таблица ньіовы' (за нѣдришта у таблицы дѣйствія при концу овога дѣла приключеной по § 243, а за стране у таблицы логаритма' числама наравныма надлежеће, као што су у Алгебри приключени) изнаћу и у наведеной соразмѣрности на надлежна ій мѣста поставимо, она ће се дакле у ову обратити

$$9,8884444 : 2,0934217 = 9,8019735 : БВ;$$

одкудъ сумма споляшньы' членова = сумми средньы' членова, быва

$$БВ + 9,8884444 = (2,0934217 + 9,8019735) = 11,8953952,$$

$$\text{и тако } БВ = 11,8953952 - 9,8019735 = 2,0069508 \text{ (Алгебра § 191.).}$$

И кадъ се садъ овай последньій логаритамъ, страни $БВ$ соотвѣтствуюћій, изъ таблице логаритама изнаће, изнаћесе и сама страна $БВ$, т. є мѣра нѣна дужине. Но будући да се овай лога-

ритамъ међу табличнима логаритмама са свима своима крайньима цифрама не налази, но налазе-се одъ нѣга већій и маньй, коє є знакъ, да ова иста страна *БВ* осимъ цѣлы' хватова има іоштъ и частій хвата. Дабы дакле іоштъ и оне части изнаћи могли, коє є разбієніє, наблюдавати треба начинъ прописани у Алгебри § 181, коє кадъ учинимо, изнаћићемо разбієніє десетно = 0,614 (остале цифре, коє части тисуће превозилазе, изоставляюћи), коє къ числу, манѣмъ логаритму таблицномъ соотвѣтствуюћемъ = 101, додаваюћи, быће дужина стране *БВ* = 101,614°.

Или ако бы управъ знати хотели іоштъ и ово десетно разбієніє 614 хвата, колико чине стопа, може се по § 62 у Алгебри изложеномъ начину изнаћи.

256.

Задатакъ. *Површину триугла тригонометрически изнаћи.* Или просторъ површный △ *АБЕ* фіг. 113. изнаћи. ф. 113.

Разрѣшен. По § 194. 195. површина △ $АБЕ = \frac{1}{2} cx$ (то єсть спуштаюћи изъ вр'а △ *Е* на основицу отвѣсну *ЕК*, и назначаваюћи ню са x, а основицу *АБ* са c), дакле како c, тако и x тригонометрически израчунати треба, и изнаћене вредности на ньіово мѣсто поставити.

1. Али c (по § 247.) $= 2a$. Нѣд. $\frac{1}{2} u$.
2. У △ десноуголномъ *АЕК* изнаћисе може

x или кадъ се узме AE за полупречникъ изъ соразмѣрности назначаваюћи полупречникъ са p

$$p : AE = \text{Сонд. } \tfrac{1}{2} u : \text{Сонд. } EK,$$

или $p : a = \text{Сон. } \tfrac{1}{2} u : x,$

одтудъ $x = a.$ Сон. $\tfrac{1}{2} u;$

или се x изнаћи може изъ $\triangle AEK$, узимаюћи AK за полупречникъ, быће EK дирка угла A или Судирка $\tfrac{1}{2} u$ (§ 246), и обста'ће слѣдующа соразмѣрность;

$$p : AK = \text{Суд. } \tfrac{1}{2} u : \text{Судр. } EK,$$

или $p : \tfrac{1}{2} c = \text{Суд. } \tfrac{1}{2} u : \text{Суд. } x;$

одтудъ $x = \tfrac{1}{2} c.$ Суд. $\tfrac{1}{2} u.$

Но мы ћемо првый образацъ задржати; дакле на мѣсто $\tfrac{1}{2} xc$ поставляюћи изнаћене вредности назначаваюћи површину триугла са T, бы'ће

Површина триугла $T = \tfrac{1}{2} a.$ Сон. $\tfrac{1}{2} u.$ $2a$ Нѣд. $\tfrac{1}{2} u.$ Коій образацъ збогъ обширности своє овако се скратити може

у $\triangle AEB$ има се $c : a = \text{Нѣд. } u : \text{Сонд. } \tfrac{1}{2} u,$

а у $\triangle AEK$ има се $a : \tfrac{1}{2} c = 1 : \text{Нѣд. } \tfrac{1}{2} u$

Ове две соразм. умножав. $ac : \tfrac{1}{2} ac = \text{Нѣд. } u : \text{Нѣд. } \tfrac{1}{2} u.$ Сонд. $\tfrac{1}{2} u,$

првый и другій членъ дѣлећ. $1 : \tfrac{1}{2} = \text{Нѣд. } u : \text{Нѣд. } \tfrac{1}{2} u.$ Сонд. $\tfrac{1}{2} u,$

производъ споляш. и унут. чл. Нѣд. $\tfrac{1}{2} u.$ Сонд. $\tfrac{1}{2} u = \tfrac{1}{2}$ Нѣд. $u,$

одтудъ тражећи Нѣд. $u;$ Нѣд. $u = 2$ Нѣд. $\tfrac{1}{2} u.$ Сонд. $\tfrac{1}{2} u.$

Садъ у првомъ триугла образцу $\tfrac{1}{2} a.$ Сонд. $\tfrac{1}{2} u.$ $2a$

Нѣд. $\frac{1}{2}u$, обштегъ чинителя узимаюħи, быва

$$T = \frac{1}{2}a^2\ (2\ \text{Нѣд.}\ \tfrac{1}{2}u.\ \text{Сон.}\ \tfrac{1}{2}u),$$

на мѣсто 2 Нѣд. $\frac{1}{2}u$. Сон. $\frac{1}{2}u$ поставляюħи Нѣдр. u бы'ħе $T = \frac{1}{2}a^2$. Нѣд. u.

УПОТРЕБЛЕНІЄ АЛГЕБРЕ ПРИ ТРАЖЕНЮ ГЛАВНЫ' ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИ' НАСТАВЛЕНІЯ.

257.

I. *Изъ задатоегъ лука* $АД = y$, *нѣеовоегъ Нѣдриште и Сонѣдриште, и изъ задатоегъ лука* $АБ = \alpha$, *нѣеовоегъ Нѣдриште и Сонѣдриште; изнаħи Нѣдриште и Сонѣдриште разлике* $ДГ$ и $ГС$

ф. 114. Фіг. 114.

Разрѣш. 1. Триугли $СБЕ$, $СІК$, $ДІГ$ подобни су (§ 239.), одтудъ

$$СБ : ДІ = СЕ : ДГ.$$

У овой соразмѣрности осимъ четвртога члена и другій є $ДІ$ непознатъ, коій се овако наħи може:

$$ДІ = ДК - ІК,$$

а $ІК$ овако се пронаħи може;

$$СЕ : СК = ЕБ : ІК$$

$$ІК = \frac{ЕБ \cdot СК}{СЕ},$$

а кадъ се изнаħе $ІК$ изнаħи є лако $ДІ$.

Кадъ се на мѣсто овы' израженія тригонометриче лініє поставе, быва

$$ДІ = ДК - ІК$$

т. є. $= \text{Нѣд. } \gamma - \frac{\text{Нѣд. } \alpha \,.\, \text{Сон. } \gamma}{\text{Сон. } \alpha}$;

а $ДГ = \frac{ЕС \,.\, ДІ}{БС} = \frac{\text{Сон. } \alpha}{1} \left(\text{Нѣд. } \gamma - \frac{\text{Нѣд. } \alpha \,.\, \text{Сон. } \gamma}{\text{Сон. } \alpha}\right)$;

назнач. множ. сврш. $\text{Нѣд. } (\gamma - \alpha) = \text{Нѣд. } \gamma \text{ Сон. } \alpha - \text{Сон. } \gamma \text{. Нѣд. } \alpha$.

Разрѣш. 2. $\text{Сон. } (\gamma - \alpha) = ГС = ГІ + ІС$; дакле свакій членъ изтраживаюћи и собраніе сршиваюћи добы'ћемо пожелано. Да тражимо $ІС$ изъ

$$СЕ : СК = СБ : ІС,$$

одтудъ $ІС = \frac{СК}{СЕ} = \frac{\text{Сон. } \gamma}{\text{Сон. } \alpha}$.

$А\ ІГ$ изнаћисе може изъ соразмѣрности ове

$$СБ : ДІ = БЕ : ІГ;$$

$$ІГ = \frac{БЕ \,.\, ДІ}{СБ};$$

поставляюћи вредность $ІГ = \frac{\text{Нѣд. } \alpha}{1} \left(\text{Нѣд. } \gamma - \frac{\text{Нѣд. } \alpha \,.\, \text{Сон. } \gamma}{\text{Сон. } \alpha}\right)$,

умноженіе сршиваюћи $ІГ = \text{Нѣд. } \alpha \,.\, \text{Нѣд. } \gamma - \frac{\text{Нѣд. } \alpha^2 \,.\, \text{Сон. } \gamma}{\text{Сон. } \alpha}$;

дакле $ІС + ІГ = \frac{\text{Сон. } \gamma}{\text{Сон. } \alpha} + \text{Нѣд. } \gamma \,.\, \text{Нѣд. } \alpha - \frac{\text{Нѣд. } \alpha^2 \,.\, \text{Сон. } \gamma}{\text{Сон. } \alpha}$;

ова два разбіенія разправляюћи на чинителѣ;

$$= \frac{\text{Сон. } \gamma}{\text{Сон. } \alpha} . (1 - \text{Нѣд. } \alpha^2) + \text{Нѣд. } \gamma . \text{Нѣд. } \alpha,$$

на мѣсто $(1 - \text{Нѣд. } \alpha^2)$ поставляюћ. Сон. α^2

$$= \frac{\text{Сон. } \gamma}{\text{Сон. } \alpha} . \text{Сон. } \alpha^2 \text{ 4 Нѣд. } \gamma . \text{Нѣд. } \alpha,$$

множеніе соверш. $= \text{Сон. } \gamma . \text{Сон. } \alpha + \text{Нѣд. } \gamma . \text{Нѣд. } \alpha.$

дакле $\text{Сон.} (\gamma - \alpha) = \text{Сон. } \gamma . \text{Сон. } \alpha + \text{Нѣд. } \gamma . \text{Нѣд. } \alpha.$

258.

Слѣд. Ако су лукови α, γ, маньи одъ четвртака, принадлежаће већемъ луку веће нѣдриште, манѣмъ манѣ; са свимъ противно є кодъ Сонѣдришта ньіовы'. Одтудъ другій производъ у образцу нѣдришта очевидно маньій є одъ првога. Слѣдователно лагко се увидити може, треба ли производъ одъ другога одузети.

259.

II. *Изъ задатоеъ лука* $АБ = \alpha$, *нѣговоеъ Нѣдришта и Сонѣдришта; изъ задатоеъ лука* $БД = \gamma$, *нѣговоеъ Нѣдр. и Сонд. изнаћи Нѣд.* $ДК$ *и Сон.* $КС$, *сумме ова два лука* $(\alpha + \beta)$.

Разрѣш. 1. Нѣдриште сумме $ДК$, коє се тражи, составлясе изъ частій $ДІ$ и $ІК$, коє пособъ изнаћи и собрати валя. И тако

$$СЕ : ДГ = СБ : ДІ,$$

$$ДІ = \frac{СБ . ДГ}{СЕ} = \frac{\text{Нѣд} . \beta}{\text{Сон. } \alpha};$$

а да бы IK изнаћи могли, морамо изъ $\triangle IKC$ будући да су намъ све стране непознате CI изтражити,

$$\text{а} \quad CI = CГ - IГ,$$

али $IГ$ овако се налази $EC : ДГ = EБ : IГ$

$$IГ = \frac{EБ \,.\, ДГ}{EC} = \frac{\text{Нѣд. } \alpha \,.\, \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha};$$

дакле $CI = \text{Сон. } \beta - \dfrac{\text{Нѣд. } \alpha \,.\, \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha}$.

По познатой страни CI, да тражимо изъ $\triangle CIK$ страну IK, коя се къ $ДI$ додати има, овымъ начиномъ;

$$CБ : CI = БE : IK,$$

$$IK = \frac{БE \,.\, CI}{CБ} = \text{Нѣд. } \alpha \left(\text{Сон. } \beta - \frac{\text{Нѣд. } \alpha \,.\, \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha}\right)$$

$$= \text{Нѣд. } \alpha \,.\, \text{Сон. } \beta - \frac{\text{Нѣд. } \alpha^2 \,.\, \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha}.$$

и $ДI + IK = \text{Нѣд. } \alpha \text{ Сон. } \beta - \dfrac{\text{Нѣд. } \alpha^2 \,.\, \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha}$

$$+ \frac{\text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha}$$

Ова два разбієнія разправляюћи на чинителѣ, быва:

$$= \frac{\text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha} (1 - \text{Нѣд. } \alpha^2),$$

$$= \text{Нѣд. } \alpha \,.\, \text{Сон. } \beta + \frac{\text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha} (\text{Сон. } \alpha^2); \text{ дакле}$$

$$\text{Нѣд. } (\alpha + \beta) = \text{Нѣд. } \alpha \,.\, \text{Сон. } \beta + \text{Сон. } \alpha \,.\, \text{Нѣд. } \beta.$$

Р а з р ѣ ш. 2. Сонѣдриште сумме $(\alpha + \beta)$ овако се тражи:

$$СБ : СI = СЕ : СК,$$

$$СК = \frac{СЕ \,.\, СI}{СБ} = \text{Сон. } \alpha \left(\text{Сон. } \beta - \frac{\text{Нѣд. } \alpha \,.\, \text{Сон. } \beta}{\text{Сон. } \alpha}\right),$$

дакле $\text{Сон. } (\alpha + \beta) = \text{Сон. } \alpha \,.\, \text{Сон. } \beta - \text{Сон. } \alpha \,.\, \text{Нѣд. } \beta.$

260.

III. *Изнаћи дирку разлике два лука или Дир.* $(\gamma - \alpha)$.

$$\text{Дир. } (\gamma - \alpha) = \frac{\text{Нѣд. } (\gamma - \alpha)}{\text{Сон. } (\gamma - \alpha)};$$

$$= \frac{\text{Нѣд. } \gamma \,.\, \text{Сон. } \alpha - \text{Сон. } \gamma \,.\, \text{Нѣд. } \alpha}{\text{Сон. } \gamma \,.\, \text{Сон. } \alpha + \text{Нѣд. } \gamma \,.\, \text{Нѣд. } \alpha};$$

Кадъ се садъ и числитель и именитель чрезъ $\text{Сон. } \gamma \,.\, \text{Сон. } \alpha$ дѣли:

$$= \frac{\frac{\text{Нѣд. } \gamma \,.\, \text{Сон. } \alpha}{\text{Сон. } \gamma \,.\, \text{Сон. } \alpha} - \frac{\text{Сон. } \gamma \,.\, \text{Нѣд. } \alpha}{\text{Сон. } \gamma \,.\, \text{Сон. } \alpha}}{\frac{\text{Сон. } \gamma \,.\, \text{Сон. } \alpha}{\text{Сон. } \gamma \,.\, \text{Сон. } \alpha} + \frac{\text{Нѣд. } \gamma \,.\, \text{Нѣд. } \alpha}{\text{Сон. } \gamma \,.\, \text{Сон. } \alpha}};$$

одтудъ $\text{Дир. } (\gamma - \alpha) = \frac{\text{Дир. } \gamma - \text{Дир } \alpha}{1 + \text{Дир. } \gamma \,.\, \text{Дир } \alpha}.$

261.

IV. *Изнаћи Дирку сумме два лука, или Дир.* $(\alpha + \beta)$.

$$\text{Дир. } (\alpha + \beta) = \frac{\text{Нѣд. } (\alpha + \beta)}{\text{Сон. } (\alpha + \beta)};$$

$$= \frac{\text{Нѣд. } \alpha \text{ . Сон. } \beta + \text{Сон. } \alpha \text{ . Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha \text{ . Сон. } \beta - \text{Нѣд. } \alpha \text{ . Нѣд. } \beta},$$

са Сон. α . Сон. β и

числ. и именит. дѣлећи быва

$$= \frac{\dfrac{\text{Нѣд. } \alpha \text{ . Сон. } \beta}{\text{Сон. } \alpha \text{ . Сон. } \beta} + \dfrac{\text{Сон. } \alpha \text{ . Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha \text{ . Сон. } \beta}}{\dfrac{\text{Сон. } \alpha \text{ . Сон. } \beta}{\text{Сон. } \alpha \text{ . Сон. } \beta} - \dfrac{\text{Нѣд. } \alpha \text{ . Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha \text{ . Сон. } \beta}}$$

$$= \frac{\text{Дир. } \alpha + \text{Дир. } \beta}{1 - \text{Дир. } \alpha \text{ . Дир. } \beta}.$$

262.

V. *Изъ Нѣдришта и Сонѣдришта єдинственоєъ угла, Нѣдриште и Сонѣдриште угла удвоєноєъ изнаћи.*

Разрѣш. 1. Да назначимо єдинственный угалъ са φ, а удвоєный са 2φ, бы'ће

$$\text{Нѣд. } 2\varphi = \text{Нѣд. } (\varphi + \varphi);$$
$$= \text{Нѣд. } \varphi \text{ . Сон. } \varphi + \text{Сон. } \varphi \text{ . Нѣд. } \varphi,$$

собраніє свршив. $= 2$ Нѣд. φ . Сон. φ.

Разрѣш. 2. $\text{Сон. } 2\varphi = \text{Сон. } (\varphi + \varphi);$
$$= \text{Сон. } \varphi \text{ . Сон. } \varphi - \text{Нѣд. } \varphi \text{ . Нѣд. } \varphi,$$
$$= \text{Сон. } \varphi^2 - \text{Нѣд. } \varphi^2.$$

У овомъ израженію поставляюћи на мѣсто Сон. φ^2 равноважно 1^2 — Нѣд. φ^2, быва

$$\text{Сон. } 2\varphi = 1 - 2 \text{ Нѣд. } \varphi^2.$$

И у овомъ израженію на мѣсто Нѣд. φ^2 поставляюћи 1 — Сон. φ^2 быва

$$\text{Сон. } 2\varphi = 2\text{Сон. } \varphi^2 - .1.$$

И тако ово су образци:

1) Нѣд. 2φ = 2Нѣд. φ . Сон. φ.

2) Сон. 2φ = Сон. φ^2 — Нѣд. φ^2.

3) Сон. 2φ = 1 — 2 Нѣд. φ^2.

4) Сон. 2φ = 2 Сон. φ^2 — 1.

263.

VI. *Изнаћи Дирку удвоєноґ угла.*

Дирка 2φ = Дир. $(\varphi + \varphi)$;

али Дир. $(\varphi + \varphi)$ (по § 261. IV.) =

$$= \frac{\text{Дир. } \varphi + \text{Дир. } \varphi}{1 - \text{Дир. } \varphi \,.\, \text{Дир. } \varphi} = \frac{2 \text{ Дир. } \varphi}{1 - \text{Дир. } \varphi^2}$$

264.

VII. *Изъ Сонѣдришта удвоєноґ лука, изнаћи Нѣдриште и Сонѣдриште єдинственно.*

Разрѣш. 1. Изъ § 262. V. Образца 3,

Сон. 2φ = 1 — 2 Нѣд. φ^2 быва

премештанѣмъ 2 Нѣд. φ^2 = 1 — Сон. 2φ,

и одтудъ Нѣд. $\varphi = \sqrt{\frac{1 - \text{Сон. } 2\varphi}{2}}$.

Разрѣш. 2. Изъ § 262. V. Образца 4

Сон. 2φ = 2 Сон. φ^2 — 1 быва

премештанѣмъ Сон. $2\varphi^2$ = Сон. $2\varphi + 1$,

и одтудъ Сон. $2\varphi = \sqrt{\frac{\text{Сон. } 2\varphi + 1}{2}}$.

265.

VIII. *Изнаћи дирку єдинственоґ уґла.*

Разрѣш. $\text{Дир. } \varphi = \dfrac{\text{Нѣд. } \varphi}{\text{Сон. } \varphi}$

$$= \frac{\sqrt{\dfrac{1 - \text{Сон. } 2\varphi}{2}}}{\sqrt{\dfrac{\text{Сон. } 2\varphi}{2}}} = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Сон. } 2\varphi}{1 + \text{Сон. } 2\varphi}\right)};$$

Числит. и именит. чрезъ Сон. 2φ дѣлећи

$$= \sqrt{\frac{\dfrac{1}{\text{Сон. } 2\varphi} - 1}{\dfrac{1}{\text{Сон. } 2\varphi} + 1}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{Сѣч. } 2\varphi - 1}{\text{Сѣч. } 2\varphi + 1}\right)},$$

Числит. и именит. са (Сѣч. $2\varphi + 1$) множећ.

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{Сѣч. } 2\varphi^2 - 1^2}{(\text{Сѣч. } 2\varphi + 1)^2}\right)}$$

$$= \frac{\text{Дир. } 2\varphi}{\text{Сѣч. } 2\varphi + 1}.$$

А кадъ се іошть числит. и именит. са (Сѣч. $2\varphi - 1$) умножи, изишло бы

$$= \sqrt{\frac{(\text{Сѣч. } 2\varphi + 1)^2}{(\text{Сѣч. } 2\varphi - 1)^2}}$$

$$= \frac{\text{Сѣч. } 2\varphi + 1}{\text{Дир. } 2\varphi}.$$

266.

Слѣдства. 1. Изъ овога є видити, да є

$$\text{Нѣд.}(\alpha+\beta) = \text{Нѣд.}\,\alpha \,.\, \text{Сон.}\,\beta + \text{Сон.}\,\alpha \,.\, \text{Нѣд.}\,\beta \text{ § 259,}$$

$$\text{Нѣд.}(\alpha-\beta) = \text{Нѣд.}\,\alpha \,.\, \text{Сон.}\,\beta - \text{Сон.}\,\alpha \,.\, \text{Нѣд.}\,\beta$$

$$\text{Сумма} = 2\ \text{Нѣд.}\,\alpha \,.\, \text{Сон.}\,\beta.$$

$$\text{Разлика} = 2\ \text{Сон.}\,\alpha \,.\, \text{Нѣд.}\,\beta.$$

2.

$$\text{Сон.}(\alpha+\beta) = \text{Сон.}\,\alpha \,.\, \text{Сон.}\,\beta - \text{Нѣд.}\,\alpha \,.\, \text{Нѣд.}\,\beta$$

$$\text{Сон.}(\alpha-\beta) = \text{Сон.}\,\alpha \,.\, \text{Сон.}\,\beta + \text{Нѣд.}\,\alpha \,.\, \text{Нѣд.}\,\beta$$

$$\text{Сумма} = 2\ \text{Сон.}\,\alpha \,.\, \text{Сон.}\,\beta.$$

$$\text{Разлика} = 2\ \text{Сон.}\,\alpha \,.\, \text{Нѣд.}\,\beta.$$

Изъ овога се ясно види, коимъ се начиномъ сумме и разлике Нѣдришта и Сонѣдришта у производе обратити могу, или производи у сумме и разлике.

267.

Изнаћи отношеніе међу странама тригла и єднимъ угломъ.

1. Да се назначе углови великимъ писменима, а стране онымъ истымъ писменима коима су и супротни углови назначени но малыма, быће

2. $a : b = \text{Нѣд.}\,A : \text{Нѣд.}\,B$, **и** $\text{Нѣд.}\,B = \dfrac{b \,.\, \text{Нѣд.}\,A}{a}$

$a : c = \text{Нѣд.}\,A : \text{Нѣд.}\,C$, **и** $\text{Нѣд.}\,C = \dfrac{c \,.\, \text{Нѣд.}\,A}{a}$.

3. Будући да свакій угалъ триугла са осталымъ двома равањ є двома деснима или 180°,

тако се као нѣіовъ доугалъ сматра, а такови угли равна нѣдришта имаю, бы'ће

$$\text{Нѣд. } C = \text{Нѣд. } (A + Б),$$

али Нѣд. $(A + Б)$, то є нѣдриште сумме: бы'ће

$$\text{Нѣд. } C = \text{Нѣд. } A \,.\, \text{Сон. } Б + \text{Сон. } A \,.\, \text{Нѣд. } Б.$$

4. Кадъ се овде на мѣсто нѣдришта C и нѣд. $Б$ изнађене вредности подъ числомъ 2. поставе, и уравненіє се чрезъ нѣд. A, а после умножи са a, быва

$$c = a \,.\, \text{Сон. } Б + б \,.\, \text{Сон. } A.$$

5. *То єсть, да се умноже две стране трипгла, свака са сонѣдриштемъ долежећегъ гла; бы'ће сумма оба производа равна страни трећой.*

6. По числу 4. є $c = a \,.\, \text{Сон. } Б + б \,.\, \text{Сон. } A$, пренашанѣмъ $б \,.\, \text{Сон. } A$, быва $c - б \,.\, \text{Сон. } A = a \,.\, \text{Сон. } Б$, оба члена подизаюћи на квадратъ; $C^2 - 2бc \,.\, \text{Сон. } A + б^2 \,.\, \text{Сон. } A^2 = a^2 \,.\, \text{Сон. } Б^2$, но будући да є $\text{Сон. } A^2 = (1 - \text{Нѣд. } A^2)$

$$\text{а Сон. } Б^2 = (1 - \text{Нѣд. } Б^2),$$

ова израженія поставляюћи на мѣсто оны', быва

$$c^2 - 2бc \,.\, \text{Сон. } A + б^2 \,(1 - \text{Нѣд. } A^2) = a^2 \,(1 - \text{Нѣд. } Б^2).$$

У првомъ члену уравненія умноженіє назначено свршиваюћи, а у другомъ на мѣсто Нѣд. $Б^2$ равноважно израженіє подъ числомъ 2 изнађено но найпре на квадратъ узвышено постав-

ляюћи, и такоћеръ назначено умножёніе свршиваюћи, быва:

$$c^2 - 2бc \,.\, \text{Сон.}\, A + б^2 - б^2 \,.\, \text{Нѣд.}\, A = a^2 - б^2 \,.\, \text{Нѣд.}\, A,$$

но будући да се $-б^2\,\text{Нѣд.}\, A$ у оба члена уравненія наоди, таково се може изоставити, и быће

$$c^2 - 2бc \,.\, \text{Сон.}\, A + б^2 = a^2,$$

одтудъ $б^2 + c^2 - a^2 = 2бc \,.\, \text{Сон.}\, A,$

и $$\frac{б^2 + c^2 - a^2}{2бc} = \text{Сон.}\, A.$$ т. є.

Сонѣдриште угла изъ задаты трію страна налазисе, кадъ се квадратне стране траженый угалъ заключаваюће соберу, одтудъ се квадратъ треће стране одузме, и разликасе чрезъ удвоєный производъ страна, кое угалъ пожеланый заключаваю, раздѣли.

7. Да бы изъ предидућегъ образца нѣдриште истога угла изнаћи могли, треба да се опоменемо, да є

$$\text{Нѣд.}\, A^2 = (1 - \text{Сон.}\, A^2) = (1 + \text{Сон.}\, A)(1 - \text{Сон.}\, A).$$

8. Али $$(1 + \text{Сон.}\, A) = \frac{2бc + б^2 + c^2 - a^2}{2бc},$$

$$= \frac{(б + c + a)(б + c - a)}{2бc}.$$

9. Тако исто є $$(1 - \text{Сон.}\, A) = \frac{2бc - б^2 - c^2 + a^2}{2бc},$$

$$= \frac{(a + c - б)(a + б - c)}{2бc}.$$

10. Одтудъ израженія подъ чис. 8 и 9 међусобно уважаваюћи быва

$$\text{Нѣд. } A^2 = \frac{(a+б+c)\,(б+c-a)\,(a+c-б)\,(a+б-c)}{4\,б^2\,c^2},$$

11. Извлаченѣмъ $\sqrt{}$ быва Нѣд. A

$$= \frac{\sqrt{(a+б+c)(б+c-a)(a+c-б)(a+б-c)}}{2бc}$$

$$= \frac{u}{2бc}$$

12. Ово се наставленіе речма овако изговара: *Да се учини сумма свію страна; далѣ одъ сумме двею да се одузме трећа, тако ће се добыти три разлике. Она сумма и ове три разлике да се међусобно умноже, коренъ извуче, и чрезъ удвоєный производъ страна, кое пожеланый уголъ заключаваю, раздѣли.*

268.

Изнаћи полупречникъ оногъ окружія, кое преко ошиля триугла, коега су стране задате, прелази.

Разрѣш. Да назначимо пожеланый полупречникъ са p; быће $p = БГ$,

быће по разрѣшенію триугла равнокракогъ $БГС$

$$a = 2БГ \text{ . Нѣд. } \tfrac{1}{2}\Gamma = 2p : \text{Нѣд. } A;$$

$$\text{дакле } p = \frac{a}{2\text{Нѣд. } A};$$

но будући да є по предид. § ч. 11.

$$\text{Нѣд. } A = \frac{\sqrt{(a+б+c)(б+c-a)(a+c-б)(a+б-c)}}{2бc};$$

быће такођеръ

$$p = \frac{абc}{\sqrt{(a+б+c)(б+c-a)(a+c-б)(a+б-c)}}.$$

269.

Изъ задаты трїю страна триугла, површину нѣгову изнаћи.

Разрѣш. 1. Кадъ се изъ угла $Б$ спуштена отвѣсна назначи $БД = x$. а површина триугла са T, быће по § 195.

$$T = \frac{xб}{2},$$

2. Али по Тригонометрическимъ основима

$$x = c. \text{ Нѣд. } A;$$

дакле $T = \frac{1}{2} бc.$ Нѣд. $A = \frac{1}{4} u.$

3. Изъ задате површине T и изъ задаты двею страна $б, c,$ наћисе може Нѣд. A изъ уравненія овога § числ. 2.

$$T = \frac{1}{2} бc. \text{ Нѣд. } A,$$

$$\text{Нѣд. } A = \frac{2T}{бc},$$

4. Изъ задате површине, єдне стране, и угла, изнаћисе може друга страна овай угалъ съ другомъ завађаюћа, изъ истогъ уравненія.

$T = \frac{1}{2}\, бc$ Нѣд. A, тражећи c, быће

$$c = \frac{2T}{б \text{ Нѣд. } A}.$$

Примѣчаніе. Кои се са разрѣшеніяма овыма добро позна, тай ће моћи и многе друге задатке безъ свакe теготе разрѣшити.

ОДДѢЛЕНІЄ ТРЕЋЕ.

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

ГЛАВА ПРВА.

О ПОНЯТІЮ, ПОВРШИНАМА, И ЗАПРЕМИНАМА ТѢЛА.

270.

Изясненіє. *Сталность* или *Тѣло* у Математіки зовесе количество просторно, (§ 4.), коє се на три управленія разширує.

271.

Изясн. *Запремина* тѣла зовесе онай просторъ, коє тѣло у овой неизмѣримой шупльини заузима, то єсть у смотренію нѣговогъ простираня.

272.

Изясн. *Површина* тѣла, зовесе крайнѣ тѣла простиранѣ, сталность нѣгову опредѣляваюће,

и са свію страна окончаваюћесе. *Основъ* тѣла є она површина, на коіой тѣло почива, или се да почива представля. Изъ ошиля нѣговогъ, т. є. изъ найвышше тѣла точке на нѣговъ основъ спуштена отвѣсна, представля *высину* нѣгову.

273.

Изяснен. Выше углова површны као фіг. 115. *АнБ, АнВ* и *ВнБ* у обштемъ ошилю *н* стицаюћійсе, међусобно нагибаюћійсе, са своима странама узаймно додираюћійсе, сачињаваю *уголъ сталный или тѣлесный.* *ф.* 115.

274.

Слѣд. За сочиненіє угла тѣлесногъ наймањ три угла површна быти мораю. Єръ два угла површна са обадвема странама додиратисе не могу (§ 191.), али три и выше ньи могусе додирнути, и угалъ тѣлесный сочинити.

275.

Наставл. *Сви углови површни, уголъ тѣлесный сачињаваюћи, имаю мањ одъ* 360 *степенїй.*

Доказат. Сви углови површни на равной површини око обштегъ ошиля положены, слѣдователно међусобно не нагнути, скупа имаю 360° (§ 44. ч. 2.); дакле сви углови површни, угалъ

тѣлесный сачињаваюћи, и тако међусобно нагнути, манѣ одъ 360° имати мораю (§ 273.).

276.

Изяснен. Она тѣла, коя се многимъ површинама равнымъ покриваю, и опредѣляваю, вообште зовусе *полиедра*, а поособъ по числу површина, коима се покриваю, зовесе *тетраедронъ*, са четиръ површине: *пентаедронъ*, са петъ: *ексаедронъ*, са шестъ површина равны' опредѣлѣно и проч. Полиедра друга су *правилна*, а друга *неправилна*; она се окончаваю површинама равнымъ правилныма; међусобно равныма, као и угловима тѣлеснымъ међусобно равныма; а ова неправилныма.

277.

Изяснен. Полиедра *подобна* зовусе међусобно она, коя се равнымъ числомъ површина равны', међусобно подобны', толико углова тѣлесны', међусобно равны', сочињаваюћій, опредѣляваю. Ако су оне површине іошть соотвѣтственно равне, полиедра *подобна* и *равна* зовусе.

278.

Слѣд. Оваковы' полиедра правилны' има слѣдуюћіи видова: *тетраедронъ* са четиръ тригонима правилныма међусобно равныма опредѣ-

ленъ Фіг. 116 : *октаєдронъ* са осамъ равнымъ ф. 116.
тригонима правилнымъ као Фіг 117 : *ікосаєдронъ*, ф. 117.
са двадесетъ тригонима правилныма међусобно
равныма опредѣленъ, као Фіг. 118 : *ексаєдронъ* ф. 118.
са шестъ тетрагонима правылнима међусобно рав-
ныма или квадратима опредѣленъ, као Фіг. 119; ф. 119.
додекаєдронъ, са дванайстъ пентагонима правил-
ныма међусобно равныма опредѣленъ, као Фіг. 120. ф. 120.

279.

Изяснен. Ако представимо, да се некій
полигонъ *АБВДЕ* Фіг. 121. изъ положенія своегъ ф. 121.
по повученой некой правой ліній, кою мы *упра-*
вителнщомъ зовемо, непресѣчно и себи равноте-
кући движе и трагъ свой после себе да заостав-
ля, докъ негди одъ движенія свога престане,
изродиће се тѣло, коє вообште *призма* зовемо.
Ако є полигонъ производећій квадратъ, и высина
призматова равна страни квадрата, призма ова-
вый, кои є ексаєдронъ правилный, поособъ зове-
се *кубусъ* (Геометрическій) Фіг. 119 : ако є ос- ф. 119.
новъ производећій параллелограммъ, изродиће се
оваковимъ движеніємъ поособъ *параллелепипе-*
донъ, као у Фіг. 122 : ако є основъ производећій ф. 122.
кругъ, рађасе призма, нарочито *валякъ* (цылин-
деръ) названый као у Фіг. 123. ф. 123.

280.

Слѣдства. Призматова површина, по оду-
зетомъ горнѣмъ и долнѣмъ основу, опредѣлюєсе

са толико параллелограмма равно высоки' єднаку са призматомъ высину имаюћій, колико є страна у полигону производећемъ. Свака страна полигона производећегъ непресѣчнымъ, и равнотекућимъ движеніємъ раћа параллелограммъ єднаке са призматомъ высине.

2. Призма раћасе изъ основа производећегъ, толико пута узетогъ, колико є точкій у высини нѣговой.

281.

Изяснен. Призма по виду и по основу производећемъ зовесе *триголный*, *четвороуголный*, и проч. као што буде основъ производећій, триголный, четворострaный и проч. *Призма правъ* зовесе, кадъ є нѣгова управителница на основъ ф. 121. отвѣсна, као фіг. 121. 124, *коссъ* (косовитъ): ф. 124. кадъ є управителница косса на основицу, као у ф. 125. фіг. 125.

282.

Изяснен. Кадъ вообразимо себи, да се ф. 126. некій полигонъ *АБВД* фіг. 126. изъ положенія своегъ трагомъ неке праве лініе управителнице тако непресѣчно и равнотекући движе, и трагъ свой после себе да заоставля, да се свакогъ магновенія движенія нѣговогъ неке частице страна нѣговы' губе и умаляваю, докъ се напоследку таковымъ умаляванѣмъ у єдну точку несліе, из-

родићесе *пирамида*, коя є по виду фігуре основа производећегъ *триуголна* или *тригона*, *четвероуголна* или *тетрагона*, *петоуголна* или *пентагона*, *ексагона* и проч.. Пирамида *права* зовесе, кадъ нѣнъ връ точки цѣлогъ основа средньой надстои, или кадъ лінія отвѣсна, изъ вр'а нѣногъ на основицу спуштена, пада на точку цѣлогъ основа средню : иначе є *косса*.

283.

Слѣд. 1. Пирамида, по одузетомъ основу, заключавасе толикимъ триуглима, колико є страна у нѣговомъ основу производећемъ. Сви ови триугли имаю у пирамиди правой равну высину, коя є отвѣсна, изъ вр'а пирамиде на ма кою основа страну спуштена.

2. Пирамида состоисе изъ толико фігура или полигона, основу подобны', колико є точкій у высини нѣной (§ 272). Стране овы' полигона изъ вр'а пирамиде къ основу, расту непресѣчно неопредѣленомъ частію, слѣдователно, кадъ се неопредѣлене точке у нѣной высни налазе, стране, па тако и полигона она сачињаваю безконечный редъ чисала наравны' (Алгебра § 168).

284.

Изяснен. Ако є основъ производећій пирамиде кругъ, пирамида овакова поособъ зовесе *ошиљакъ* (conus).

285.

Слѣдства. 1. Ошилякъ такођеръ или є *правъ*, или *коссъ*, као и пирамида (§ 281.).

2. Ошилька правогъ пупчаста површина (по одузетомъ основу, кои се поособъ изнаћи има) равна є производу изъ полуокружія круга производећегъ и ошилька стране *АБ* фіг. 127., съ коіомъ се отвѣсна, изъ вр'а на ма кою основа страну спуштена, поклапа. ф. 127.

Примѣчаніе. Опредѣленіе дубасте површине ошилька оставлясе Математики вышшой.

286.

Изяснен. Ако се основъ производећій у движенію своме пре заустави, него што се у точку сманя, изродићесе пирамида *одбієна* фіг. 128. као, ако є основъ производећій кругъ, ошилякъ *одбієньій*, фіг. 129. ф. 128. ф. 129.

287.

Слѣд. Пирамида одбієна (са изключеніемъ основа) опредѣлюєсе са толикимъ трапезіяма равно высокима, две супротне стране равнотекуће имаюћима, колико є страна у основу производећемъ.

I. ПРИЗМА.

288.

Наставл. *Површина призмата правогъ, (по изключенимъ основима) равна є производу изъ омѣрія основа производећегъ и высине призматове,*

Доказат. Површина призматова, (по изключенымъ основима) опредѣлюєсе толикимъ параллелограммовима, ону исту са призматомъ высину имаюћима, колико є страна у основу производећемъ (§ 279.); али свакога таковогъ параллелограмма површина равна є производу изъ основа нѣговогъ и высине призматове (као высине обште) § 194; дакле свію овы параллелограмма, слѣдователно и сама призматова површина пострана равна є производу изъ основа свію овы параллелограмма и высине призматове, али основи свію овы параллелограмма сачињаваю омѣріе основа производећегъ; дакле.

289.

Слѣдства. 1. Површина валька правогъ, као призмата округлогъ, осимъ основа, равна є производу изъ окружія круга производећегъ и высине. Одтудъ.

2. Ако є высина валька равна своме пречнику, пострана или пупчаста нѣгова површина бы-

ће учетворена основа производећег. Єр пупчаста валька површина равна є њноме производу изъ окружія круга производећегъ и высине валька, или пречника высини (по представляню) равногъ, а површина основа, или круга производећегъ равна є само єдной четвртой части истога производа (§ 203. ч. 2.).

3. Ако се површине основа призматовы пособъ опредѣле, и къ постраной њговой површини додаду, добыћесе цѣла површина призматова (као и валькова).

290.

Наставл. *Сталность (или запремина) призматова равна є производу изъ основа производећегъ и высине њгове.*

Доказат. Призма ніе ништа друго, него основъ производећій, толико пута узетъ, колико є точкій у высини, али то є производъ изъ основа производећегъ и высине; дакле

291.

Слѣдства. Дакле и валькова сталность равна є производу изъ круга производећегъ и высине.

2. Да бысмо запремину валька шуплѣгъ или цеви изнаћи могли, опредѣлити треба найпре запремину валька, као изъ тѣла сталногъ, па пос-

ле поособъ изтражити треба шупльину валька као сталность, и ову одузети одъ запремине, пре опредѣлене.

Примѣчаніе. Сталности є мѣра найспособнія кубусъ, због постояне, удобне, и уредне запремине своє: имено хватъ кубическій, стопа кубическа, палацъ кубическій, и проч. *Мѣрити* тѣло нѣко, зовесе израживати, колико оно ковакови кубически хватій, стопа, палаца кубически и проч. у запремини своіой садржава. Найуднія є мѣра, стопа кубическа, коя у ширину, дужину и высину по єдну стопу дужине за мѣру има, кою дакле са свію страна окружава равна површина квадратна; дакле стопа кубическа є коцка, имаюћа са свію страна површину равну єдной стопи квадратной. Свака стопа кубичечка има 1728 кубически палаца, свакій палацъ 1728 куб. лінія и. т. д. Збиръ одъ 216 кубически стопа сачинява хватъ кубическій. Знакъ, коимъ се кубусъ означава єсть *C*, или квадратъ ☒, двема двоуголнима назначенъ, коме се знаку іоштъ додає съ леве стране обичный знакъ хвата, стопе и палца, Тако 3^{oc}, $7'^{c}$, или $3^{o\boxtimes}$, $7'^{\boxtimes}$ значи 3 хвата кубическа, седамъ стопа кубическій.

II. ПИРАМИДА.

292.

Наставл. *Површина пирамиде праве, осимъ основа, равна є производу изъ полуомѣрія*

основа и лініе отвѣсне изъ ошиля пиралиде на ма кою основа страну спуштене.

Доказат. Површина она пирамиде состоисе изъ толико триуглова равно высоки, колико є страна у основу производећемъ, али површина оны триуглова равна є реченоме производу; єръ основи ньіови скупа износе омѣріє основа производећегъ, а површина свакога триугла равна є производу изъ пола основице и высине (§ 195.), коя є овде она иста са предреченомъ отвѣсномъ.

293.

Слѣд. Пошто триугли, коима се косса пирамида покрива, сви нису равно высоки, поособъ ньіове површине изнаћи валя, и осимъ основа у сумму ій собрати, тако ћемо добыти цѣле пиралиде коссе површину.

294.

Наставл. *Површина пирамиде праве одбієне, основе равнотекуће имаюће (осимъ основа) равна є производу изъ полусумме омѣрія основа и отвѣсне, међу сваке две супротне основа стране наодећесе.*

Доказа́т. Површина овакове пирамиде одбієне (осимъ основа) состоисе изъ толико трапезія равно высоки, две супротне стране равнотекуће имаюћи, колико є у основу производе-

ћемъ страна (§ 286), али површина свію овы' трапезія равна є изложеномъ производу; єръ свакога оваковогъ трапезія површина равна є полусумми двею супротны' равнотекући' страна и отвћсне међу њима наодећесе, а све оне стране равнотекуће сочињаваю омћріє основа.

295.

Слћдства. 1. Ошилька правогъ одбієногъ (кои се само округлостію своіомъ одъ пирамиде разликує) пупчаста површина равна є производу изъ полусумме окружія' основа' и стране истога ошилька одбієногъ.

2. Пупчаста ошилька одбієногъ правогъ површина равна є такођеръ страни ошилька и окружія, међу основима окружія' среднћ аритметическ соразмћрногъ. Єръ оваково среднћ соразмћрно окружіе равно є полусумми окружія' оба основа. Да назначимо окружіе горнћгъ основа $= \pi$, долнћгъ $= \Pi$, среднћ међу овима двама $= C$; быће соразмћрность

$$\pi : C = C : \Pi,$$

одтудъ $C = \frac{\pi + \Pi}{2}$. (Алгебра § 118.)

296.

Наставл. *Сталность пирамиде праве цћле равна є єдной трећой части производа изъ основа производећеегъ и высине пирамиде.*

Доказат. Пирамида состоисе изъ безчисленны' полигона, основу подобны', неопредѣленомъ частію страна свои' изъ вр'а къ основу непресѣчно растећій (§ 283. ч. 2.), дакле, да бы сталность пирамиде опредѣлити могли, опредѣлитисе има найпре сумма оны' безчислены' полигона, основу подобны', али сумма ньіова равна є єдной трећой части производа изъ основа производећегъ и высине пирамиде; єръ, кадъ се она полигона, као подобна имаю као квадрати страна соотвѣтственны' (§ 210. ч. 2.), а стране, коє изъ вр'а къ основу неопредѣленомъ частію расту, слѣдую редомъ безконечнымъ чисала наравны', она полигона подобна сачињаваю истый онай редъ безконечный, кои сачињаваю квадрати чисала наравны' али сумма квадрата' чисала наравны', редъ безконечный сачињаваюћи', равна є єдной трећой части производа изъ члена последњега и числа членова (Алгебра § 175.), дакле и сумма оны' полигона подобны', изъ кои' трагова као кожурица пирамида се состои, равна є истомъ производу, али овде є последньій членъ основъ производећій, а число членова изражава высина пирамиде; єръ є толико оваковы' полигона у пирамиди, колико є точкій у высини; дакле.

297.

Слѣдства. 1. Одтудъ сталность ошилька правогъ цѣлогъ, кои є округла пирамида, равна

є такођеръ єдной трећой части производа, изъ круга основногъ и высине нѣгове.

2. Ако дакле пирамида нека са призматомъ, и ошилякъ са валькомъ некимъ исту то єсть равну высину и основъ имали буду, бы'ће пирамида призмата, а ошилякъ валька трећа часть (коєсе посредствомъ призмата триуголногъ дрвеногъ; на три усмотренію сталности равне части вешто сѣченогъ, очевидно изразити може.

3. Ако пирамида и ошилякъ имаю исте высине и површине основа равне, равне ће быти такођеръ и ньіове сталности. Исто є тако са призматомъ и валькомъ.

4. Кадъ се пирамиде одбієне Фіг. 128. као цѣле, и ошилька одбієногъ Фіг. 129. такођеръ као цѣлогъ сталности поособъ, а горньи' допуняваюћи' частій такођеръ поособъ опредѣле, и овы' се сталность одъ цѣлы' сталностій одузму, добыћесе одбієны' оваковы' тѣла сталности; или ако се међу основомъ горньимъ и долньимъ изнађе среднѣ аритметически соразмѣрна, и ова се умножи са высиномъ пирамиде одбієне, или ошиилька одбієногъ. ф. 128. ф. 129.

Примѣчаніє. Равнымъ начиномъ опредѣлитисе може запремина бурета, коя се такођеръ состои изъ два ошилька одбієна; кои' се основи већи међусобно на средини бурета додираю.

III. СФЕРА ИЛИ КРУГЛА (Globus).

298.

ф. 130. **Изясн.** *Сфера* **или** *кругла* ***К*** **(Фіг. 130). таково є тѣло, коега ограничіе или поєдине спо-**
ляшнѣ точке, одъ среднѣ точке, коя се средоточіе нѣно зове, равно отстоє. Постанѣ нѣно представитисе може, кадъ се полукругъ око пречника своегъ као око осе окрене, и после себе трагъ свой заостави. Но у таковомъ полукругу производећемъ представитисе могу или 1) безчисленне лініе отвѣсне изъ пречника *АБ* у найближымъ међусобнымъ отстояніяма на полуокружіе повуче-
ф. 131. **не, и тако међусобно равнотекуће као што Фіг. 131. предлаже : или 2) толико окружія засредоточны', слѣдовательно равнотекући', колико є точкій**
ф. 132. **у полупречнику *ВД* Фіг. 132. У првомъ постаня предположеню произлази сфера изъ толико ошиляка одбієны', неопредѣлены' малы' высина', колико се две и две лініе равнотекуће у полукругу производећемъ налазе; єръ лукови, кои се међу равнотекућима налазе, као неопредѣлено мали, са диркама слѣдовательно са странама ошилька судараюсе, за праве лініе узетисе могу. У другомъ сфере постаня пуедпоставляню, произлази она изъ толико сферически' или кора засредоточны', слѣдовательно равнотекући', колико є у полупречанику полукруга производећегъ точкій.**

299.

Слѣдства. 1. Высине свію оны' ошиляка одбієны' изъ кои' се сфера да произлази представля, заєдно узете, износе высину или пречникъ сфере, површине пакъ пупчасте оны' ошиляка одбієны' скупа износе површину сфере.

2. Полупречници оны' найтањи' кора сасредоточны', изъ кои' се сфера состои, одъ средоточія къ найкрайньой точки полупречника сфере расту редомъ безконечнымъ чисала наравны'. Єръ се у полупречнику сфере безконечне точке, слѣдовательно и безконечны' оны' кора сасредоточны' полупречници налазе.

300.

Изяснен. Кадъ представимо себи, да се сфера површиномъ некомъ сѣче, одсѣчена часть свагда ће представляти кругъ. Ако прелази површина сѣчећа преко средоточія сфере, сѣченіе показаће кругъ найвећій. Одтудъ лако се разуме, кои є *кругъ найвећій* сфере, и кое є *окружіе круга найвећега.*

301.

Наставл. ***Пупчаста површина свакога ошилька одбієноѣъ одъ оны', изъ кои' се сфера состояти разумева, равна є производу изъ вы-***

сине истоѓа ошилька одбієногъ и окружја највећега круга сфере.

ф. 133. Доказат. Да представимо себи у фіг. 133. сферу; она ће се садржавати у *АБВДЕФГХА* окружію круга највећега. У *АВЕГ* да представимо онаковый ошилякъ одбієныи (изъ кои се сфера садржавати предпоставља), коега є горныи основъ окружныи и овога окружіе у *АГ* (коє са стране сматраюћи нѣговъ пречникъ изражава), а долныи основъ окружныи и овога окружіе да буде *ВЕ;* међу окружіяма овы основа окружны среднѣ аритметически соразмѣрно окружіе да се помысли у *БФ.* Сфере высина или пречникъ *ХМД* да буде на ошилька одбієногъ основе отвѣсна; быће *ІЛ* высина ошилька одбієногъ. Окружіе круга највећега *АВДЕХА,* коега полупречникъ *БМ* да се къ среднѣ аритметичеки соразмѣрногъ окружја *БФ* точки *Б* повуче, да назовемо *П;* окружіе, међу ошилька одбієногъ основа окружіяма среднѣ соразмѣрно, коега є полупречникъ *БК,* да назначимо са *с.* По овомъ предпоставляю, пупчаста ошилька одбієногъ *АВЕГ* површина по познатомъ изложеномъ начину равна є производу изъ стране ошилька и окружја, међу ошилька основыма среднѣ соразмѣрногъ, или равна є производу

$$AB \times c,$$

а производъ изъ высине ошилька одбієногъ и окружја круга највећега сфере быће

$$ІЛ \times П,$$

$$\text{или } AB \times c = IL \times \Pi,$$

Єръ кадъ се изъ A на BE спусти отвѣсна AH, бы'ће $\triangle HAB \sim \triangle KBM$, што є осимъ углова AHB и BKM десны', угалъ $ABH =$ углу BMK због$ъ$ єдне и оне исте мѣре; єръ угалъ BMK или BMX за мѣру има лукъ BX, али истій лукъ за мѣру има и угалъ ABH, што є угалъ ABH или $ABE =$ углу ABF због$ъ$ $BF \# BE$, али угалъ ABF за мѣру има лукъ BX (§ 78.); дакле истій онай лукъ има и угалъ ABH за мѣру; трећій угалъ раванъ є трећемъ (§ 115. ч. 7.); а у триуглима подобнима стране су соотвѣтственне сораз-мѣрне (§ 161.); дакле

$$AB : AH = BM : BK,$$

или због$ъ$ $AH = IL$ (§ 55. ч. 4.), дакле IL мѣсто AH поставляюћи, бы'ће

$$AB : IL = BM : BK;$$

далѣ, кадъ се окружія имаю као полупречници (§ 183.), на мѣсто овы' поставляюћи, бы'ће

$$AB : IL = \Pi : c,$$

одкудъ производъ споляшньи' членова раванъ є производу внутрены' (Алгебра § 120.), бы'ће

$$AB \times c = IL \times \Pi;$$

дакле.

302.

Наставл. *Површина сфере равна є производу изъ окружія круга найвећега и пречника или высине сфере.*

Доказат. Пупчаста површина свію оны' ошиляка одбієны' заєдно узеты', изъ кои' се сфера состояти разумева, сачинява површину сфере, али пупчаста свію оны' ошиляка одбієны' површина равна є производу изъ окружія круга найвећега и пречника сфере. Єръ свакога овакового ошилька одбієногъ пупчаста површина равна є производу изъ окружія круга найвећега сфере и высине истога ошилька (§ 301.), дакле, кадъ высине свію оны' ошиляка одбієны', скупа узеты', износе пречникъ сфере (§ 299. ч. 1.), површина пупчаста свію оны' ошиляка одбієны' равна є производу изъ окружія круга найвећега и пречника, дакле и површина сфере равна є истоме производу.

303.

Слѣдства. 1. Површина сфере дакле равна є пупчастой површини валька (то єстъ осимъ основа'), равну высину, и пречникъ са сферомъ имаюћегъ. Єръ ако се равна она высина или пречникъ назначи са P, а окружіе са Π, быће како сфере, тако и валька површина $= P\Pi$ (§ 302.).

2. Површина є сфере учетворена круга највећега. Єръ површина сфере равна є цѣломъ производу изъ пречника и окружія круга највећега (§ 302); а површина круга највећега равна є єдной четвртой части истога производа (§ 203. ч. 1.).

304.

Наставл. *Површине сферă имаю се као квадрати пречника и полупречника исты сферă.*

Доказат. Єръ, ако се површина єдне одъ двею сферă назначи са $П$, а друге са $п$, кругъ найвећій єдне са $К$, а друге са $к$: овы полупречници $Р$ и $р$: пречници са $Д$ и $д$, быће

$$П = 4К,$$

и $п = 4к$ (по § 303. ч. 2.);

одтудъ $П : п = 4К : 4к$,

и одтудъ $П : п = К : к$ (Алгебра § 125. VI.),

али $К : к = Р^2 : р^2 = Д^2 : д^2$ (§ 210. ч. 4.);

дакле $П : п = Р^2 : р^2 = Д^2 : д^2$.

305.

Наставл. *Површина сфере имасе на цѣлу површину валька, равну высину, и пречникъ са сферомъ имаюћегъ, као* 2 *на* 3.

Доказат. Єръ пошто є оваковогъ валька пупчаста површина, као површинн сфере равна, (§ 303. ч. 1.), учетворена круга найвећега сфере (§ 303. ч. 2.), кои є са кругомъ производећимъ валька онай истій, цѣла површина валька (скупа са основима) ушесторена є круга найвећега, слѣдователно површина сфере $П$ имасе на цѣлу оваковогъ валька површину $п$, као $4К : 6к$,

или $П : п = 4К : 6к$,

или $П : п = 2 : 3$ (Алгебра § 125. VI.).

306.

Наставл. *Сталность сфере равна є єдной трећой части производа изъ површине ње и полупречника.*

Доказат. Найтанѣ оне коре сасредоточне сферическе, изъ кои се сфере сталность состояти разумѣва (§ 298. ч. 2.), имаюсе као квадрати полупречника (§ 304.), дакле, кадъ њіови полупречници слѣдую редомъ безконечнымъ чисала наравны (§ 299. ч. 2.), они исти сачињаваю редъ безконечный квадрата чисала наравны; дакле опредѣлити сталность сфере толико є као опредѣлити сумму квадрата чисала наравны, редъ безконечный сачињаваюћи, у комъ се число членова полупречникомъ, а последњій членъ последњомъ ономъ коромъ, или површиномъ сфере излаже, али по Алгебри § 175., сумма квадрата реда безконечногъ чисала наравны равна є єдной трећини производа изъ квадрата члена последњега и числа членова предидући; дакле.

Примѣчаніе. На примѣръ, ако бы было пречникъ или высина сфере $= 14'$, дакле полупречникъ $= 7'$, бы̏ће окружіе круга найвећега $= 44'$ (§ 183 и Примѣч.), одтудъ површина сфере $= 14' \times 44' = 616'^{\square}$ (§ 302.), а сталность

или запремина сфере $= \frac{616^{\square'} \times 7}{3} = 1437\frac{1}{3}{}^{\square'}$.

307.

Слѣдства. 1. Сталность дакле сфере равна є двема трећимъ частима производа изъ круга највећега и пречника сфере. Да буде кругъ највећій $= K$, пречникъ $= Д$, бы'ће површина сфере $= 4K$ (§ 303. ч. 2.), и полупречника єдна трећа $= \frac{1}{6} Д$ (као што є очевидно), дакле сфере сталность $= 4K \times \frac{1}{6} Д$ (306.), $= \frac{4}{6} КД = \frac{2}{3} КД$. Одтудъ

2. Сталность сфере равна є двема трећимъ частима валька, ону исту высину, и пречникъ са сферомъ имаюћегъ. Єръ сталность сфере равна є $\frac{2}{3}$ частима производа изъ круга највећега и пречника (по § 307. ч. 1.), а сталность оваковогъ валька равна є цѣломъ оваковомъ производу (§ 291.).

3. Дакле и сталность сфере, или сфера имасе на валякъ исте высине и пречника, као 2 : 3 (§ 302.). Єръ ако се сталность или запремина сфере назначи са $З$, а валькова са $з$; быва $З = \frac{2}{3} КД$ (§ 307. ч. 1.), а $з = КД$ (§ 291.); дакле $З : з = \frac{2}{3} КД : КД$, одтудъ, последнѣ отношеніе са 3 множећи, быва $З : з = 2КД : 3КД$, и исто отношеніе чрезъ $КД$ дѣлећи, быва $З : з = 2 : 3$.

Примѣчаніе. По изложенымъ у науцы тѣла основима, могу .се изнаћи како површине и запремине правилны' тѣла и оны', о коима досадъ

спомена ніє было. Опредѣленіє површина, као полигона правилны, съ коима се ова тѣла покриваю, никаковой теготи ніє подложно, а запремине ньове могу се као запреминѐ пирамиде изнаћи, или ако су неправилна, тако се на части раздѣлити, да се ко овима овде изложенима тѣлама причислити, и тако прорачунати могу.

IV. ошиљакъ (conus).

308.

Изясненіе. Кадъ представимо себи, да се ошиљакъ површиномъ некомъ, скрозъ пролазећомъ сѣче, сѣченѣ, одтудъ произлазеће, вообште зовесе *сѣченіе ошилька* (sectio coni), тако да сѣченіе ошилька ништа друго ніе него површина, коју єдна или друга поменутымъ начиномъ одсѣчена ошилька частъ излаже. Но найвыше у овакковомъ сѣченю само се лінія крива, одсѣчену ошилька површину заключаваюћа, у смотреніе узима, и именомъ сѣченя ошильногъ назначуєсе. По разномъ сѣчење површине положенію у смотренію ошилька сѣченогъ стране, основа, или *осе*, то єсть лініе отвѣсне изъ вр'а ошилька правогъ на средню основа точку спуштене, коя се у ошильку правомъ са нѣговомъ высиномъ слаже, сѣченѣ представля намъ *еллипсу*, *параболу*, *иперболу*.

Примѣчаніе. Постанѣ ошилька, како се нѣгова површина и нѣгова сталность изнаћи мо-

же, изъ узрока тога што є ошилякъ округла пирамида, све што се у овомъ смотренію казати могло, у заглавію подъ пирамидомъ изложено є. Наше є намѣренѣ овде оне криве лініе, коє се сѣченіемъ ошилька раѣаю, изложити, и она њіова свойства представити, коя се у физики изискую.

309.

Изясненіе. *Еллипсісъ* (*ελλειψις*) зовесе оно сѣченіе ошилька, коє се раѣа, кадъ површина, коіомъ се ошилякъ сѣћи представля, како на осу, тако и на обе стране ошилька коссо пада, као у фіг. 134′. *КЛМН* или у фіг. 137. *АЕБДА*. ф. 134′. 137.

310.

Изяснен. *Парабола* (*παραβολη*) зовесе сѣченіе ошилька, коє се раѣа, кадъ є површина сѣчећа са страномъ ошилька равнотекућа, (као што є *БАВ* фіг. 135. или *АБВ* фіг. 138.). Она ф. 135. ф. 138. права лінія *БВ*, кою ово сѣченіе на основу ошилька правогъ сачинява, зовесе *основъ* параболе.

311.

Изяснен. *Ипербола* (*ύπερβολη*) зовесе сѣченіе ошилька, коє се раѣа, кадъ є површина сѣчећа равнотекућа са осомъ ошилька, као што є *ІГХ* фіг. 136. Но за придобыти право понятіе ф. 136. иперболе, треба да представимо себи два ошиль-

ка, кои се са своимъ ошиљка сучељаваю и до-
ф. 136. дираю, као у фіг. 136. и кадъ су они у овомъ положенію, онда да вообразимо себи, да се они површиномъ некомъ *МН* на обшту супротны ошиљка осу *ую* равнотекуће сѣку, тако да се две иперболе себи супротне указую као *ХГІ* и *хгі*.

Примѣчаніе. Ако површина сѣчења прелази прѣко ошиља ошилька правогъ на основъ отвѣсно, сѣченіе є триугалъ; ако є површина сѣчења равнотекућа на основъ ошилька правогъ, изродиће се таковымъ сѣченіемъ кругъ.

312.

Изяснен. Точка она сѣченія ошилькова, у коіой є найвећа сѣченія кривина, *ошиљ* нѣгово зовесе.

ф. 137. Слѣд. Но пошто еллипсісъ фіг. 137., и
ф. 136. удвоєна иперболa фіг. 136. у две точке *А,Б*, и
ф. 138. *Г,г*, а парабола само у єдной *А* фіг. 138. највећу кривину има, слѣдуе, да еллипсисъ и ипербола има два ошиља *А* и *Б*, *Г* и *г*, а парабола само єдно.

313.

ф. 137. Изяснен. Лінія права *АБ* еллипсе фіг. 137.
ф. 136. и иперболе фіг. 136. *Гг* ошиља союжаваюћа, зовесе њіова оса *попречна* или *єлавна*, или *већа*, одъ коє точка средня *С* средоточіе зовесе: лі-

нія пакъ на главну осу отвѣсна *ЕД*, преко средоточія прелазећа, оса *маня*, и равна є среднѣ соразмѣрной међу осомъ већомъ и параметромъ (о коме ћемо далѣ изясненіе дати).

314.

Изясн. *Оса параболе* зовесе лінія права *Ах* фіг. 138. 135. изъ ошиля нѣногъ *А*, на основъ *БВ* спуштена отвѣсна. ф. 138. ф. 135.

315.

Изясн. Свака права као *ДЕ, ГХ* фіг. 138. на осу главну отвѣсна, са обе стране у кривини сѣченія окончаваюћасе, зовесе *редовна:* половина нѣна одъ кривине до осе узета, зовесе *полуредовна:* одсѣчіе пакъ осе, међу криве ошилѣмъ и редовномъ, или полуредовномъ, зовесе *одсѣчица*. Тако є редовне *ХГ* соотвѣтствуюћа одсѣчица *АІ:* полуредовне *ЛК* одсѣчица є *АК*, и проч. ф. 138.

Примѣч. О одсѣчицама редовны у еллипси соотвѣтствуюћима, као и о редовнима, и о одсѣчицама осе манѣ, далѣ свойства овде наводити противъ намѣреня є нашегъ.

316.

Изяснен. Она параболе редовна *Пп* фіг. 138., коя є учетворена одсѣчице своє, *параметеръ параболе* зовесе: а точка она *О* осе, у ф. 138.

коіой параметеръ осу сѣче, параболе *огнѣточіе* зовесе.

317.

Слѣд. Кадъ се четврта параметра часть изъ ошиля параболе на осу пренесе, опредѣлићесе парабо е огнѣточіе.

318.

Изясн. *Огнѣточіе* еллипсе зовесе она осе главне *АБ* (фіг. 137.) точка (као што є *О* и *о*), ф. 137. коя одъ обе крайнѣ осе манѣ *ЕД* точке *Е* и *Д* одстояніемъ (*ОД* и *од*) равнымъ полуоси главной *АС* одстои. Редовна преко огнѣточія *о* прола-зећа *Пп параметеръ* є еллипсе.

319.

Слѣдства. 1. Пошто се еллипса и ипер-бола стедоточіемъ на две равне части дѣли, точ-ка нѣка веће осе съ обе стране одъ крайньы манѣ осе точкій отстояніемъ, коє є равно полу-оси већой, отстояти мора. Одтудъ еллипса и ипербола два има огнѣточія као *О* и *о*, и два параметра.

2. Кадъ се еллипсе главна оса *АБ* изъ обе крайнѣ осе манѣ точке *Д* отстояніемъ *ДО* или *До*, коє є равно полуоси већой *АС*, съ обе стра-не пресѣче, опредѣлићесе два огнѣточія *О* и *о*.

320.

Изясн. *Огнѣточіе* иперболе зовесе она осе веће продужене *АБ* фіг. 139. точка *О* или *о*, коя ф. 139. одъ средоточія *С* отстои отстояніємъ *СО* равнымъ ошилю *А* отстоянію *АД* одъ обе крайнѣ осе манѣ *ЕД* точке *Д*; а *параметеръ* зовесе она редовна, коя преко огнѣточія прелази *хю*. Слѣдователно иперболa као и еллипсісъ има два огнѣточія *О* и *о*, и два параметра.

321.

Наставл. *Еллипса у себе саму повраћасе.*

Доказат. Єръ се она раћа сѣченіемъ ошилька, коє сѣченіе обе стране ошилька прелази. (§ 309.).

322.

Наставл. *Еллипса сѣчесе сваком*ъ *осом*ъ *своіом*ъ *на две равне части.*

Доказат. Єръ ако се еллипса по повученой оси пресомити, части ће се нѣне сложити и поклопити, али § 11. ч. 10.; дакле. Зато

323.

Слѣдства. 1. Еллипса дѣлисе чрезъ свое две осе на четиръ равне части.

2. Редовне еллипсе, одъ ошиля равноотстоєће, и тако кривине супротне, коє оне редовне опредѣляваю, равне су.

324.

Изяснен. Отстояніе средоточія одъ огнѣточія еллипсе зовесе *ванредоточіе* еллипсе, као ф. 137. што є *Со* фіг. 137.

325.

Наставл. *Ванредоточіе еллипсе со тымъ є веће, што є маня оса маня у смотренію попречне.*

Доказат. Єръ огнѣточія со тымъ се већма одъ средоточія удаляваю.

326.

Слѣд. Еллипсе одвећъ стинѣне весма су ванредоточне. Єръ со тымъ маню имаю осу у смотренію главне или попречне осе.

327.

Изяснен. Ако се движимо движе у кругу ф. 137. еллиптическомъ фіг. 137. око ма кога огнѣточія н. п. око *О*, ошилѣ еллипсе *Б*, ономъ огнѣточію найближе, зовесе *перихеліонъ*, а оно далѣ или удалѣніе ошиля *А* зовесе *афеліонъ*, отстояніе оногъ движимогъ одъ огнѣточія (као средоточія

сила, коима се оно движе), или права, движимо оно са огнѣточіемъ, око кога се оно движе, сокужаваюћа, зовесе *зрачацъ покретный*. Тако, ако є движимо у *А*, зрачацъ покретный є *АО*; ако движимо доље у *Д*, зрачацъ є покретный *ДО*; а ако се движимо налази у *Б*, зрачацъ є покретный *БО*, и проч.

328

Наставл. *Ако се движимо окреће у елипси око ма кога огнѣточія О, движимо оно има ће одъ нѣга отстояніе* 1) *у перихеліону најмањ БО:* 2) *у афеліону највеће АО:* 3) *у осе мањ ЕД окрайньимъ точкама Е и Д среднѣ соразмѣрно.*

Доказат. 1) *БО* зрачацъ є найманьій: 2) *АО* є найвећій, као што є очевидно: 3) *ДО* є среднѣ аритметическо соразмѣранъ међу отстояніама *БО* и *АО*; єръ є *ДО* (као = полуоси већой) полусумма одъ *БО* + *АО* (или одъ *АБ*), али полусумма два количества, то є међу њима среднѣ соразмѣрна; дакле.

ГЛАВА ДРУГА.

О МЕЂУСОБНЫМЪ ТѢЛА' ОТНОШЕНІЯМА.

329.

Наставлєн. *Призмата и вальци имаюсе у отношенію удвоєномъ основица и высина.*

Доказат. Запремину єднога да назначимо са $З$; а другога са $з$, высина єднога да буде $В$, а другога $в$, основице $О$ и $о$, бы'ће

$$З = ОВ,$$

а $$з = ов \quad (\S\ 289.).$$

одтудъ $$З : з = ОВ : ов,$$

али отношеніе ово $ОВ : ов$ сложено є отношеніе изъ $О : о = В : в$; дакле.

330.

Слѣдства. 1. Ако є $В = в$, бы'ће $З : з = О : о$ (т. є. прећашнѣ соразмѣрности друго отношеніе чрезъ $В$ и $в$ дѣлећи); ако ли є $О = о$, бы'ће

$$З : з = В : в,$$

то єсть, овакова тѣла имаюћа равне высине, имаюсе као основи, ако пакъ имаю равне основе, имаюсе као высине.

2. Ако є $З = з$, быва $ОВ = ов$, и одтудъ

$В : в = о : О$, и обратно ако се

$В : в = о : О$,

быва $ОВ = ов$,

то єсть, ако су такова два тѣла међусобно равна, ньіове высине имаюсе обратно са основима соразмѣрно, и обратно.

331.

Наставленіе. *Призмата подобна* I *и* i *имаюсе у отношенію утроєномъ свакі страна соотвѣтственьі, као* $БВ^2 : бв^2$. фіг. 124. ф. 124.

Доказател. По § 329. содржанію и доказателству

$I : i = АБ \times БВД : аб \times бвд$,

или пошто є $АБ : аб = БВ : бв$,

и $I : i = БВ \times БВД : бв \times бвд$;

али $БВД : бвд = БВ^2 : бв^2$ (§ 209.);

дакле $I : i = БВ \times БВ^2 : бв \times бв^2$,

или $I : i = БВ^3 : бв^3$.

332.

Слѣдства 1. Исто тако имаюсе и пираниде подобне.

2. Вальци подобни имаюсе међусобно као и ошиљци подобни у отношенію утроєномъ (или као кубуси) полупречника ньіовьі (окружньі) основа производећи.

333.

Наставленіе. *Сфере имаюсе у отношенію утроєномъ (или као кубуси) полупречника или пречника.*

Доказат. Да назначимо запремину єдне сфере $= З$, а друге $= з$, бы'ће

$$З : з = \frac{2}{3} КД : \frac{2}{3} кд \text{ (§ 307. ч. 1.)},$$

$$З : з = КД : кд \text{ (Алгебра § 126. VI.)},$$

то есть, у отношенію сложеномъ изъ

$$К : к \text{ и } Д : д,$$

$$\text{али } К : к = Д^2 : д^2 \text{ (§ 210. ч. 4.)};$$

$$\text{дакле } З : з = Д \times Д^2 : д \times д^2,$$

$$\text{или } З : з = Д^3 : д^3,$$

или на мѣсто пречника поставляюћи зрачце,

$$З : з = P^3 : p^3.$$

ТАБЛИЦА

ДѢЙСТВІЯ УГЛОВА

ОДЪ 1 ДО 90 СТЕПЕНІЙ ОСИМЪ ПОЄДИНИ ДЕСЕТЪ МІНУТА.

Степени. Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
0	0	0	0	0
10	290,89	290,89	7,4637255	7,4637273
20	581,77	581,77	7,7647537	7,7647610
30	872,65	872,65	7,9408419	7,9408584
40	1163,53	1163,61	8,0657763	8,0658057
50	1454,39	1454,54	8,1626808	8,1627267
1	1745,24	1745,51	8,2418553	8,2419215
10	2036,08	2036,50	8,3087941	8,3088842
20	2326,90	3327,53	8,3667769	8,3668945
30	2617,69	2618,59	8,4179190	8,4180679
40	2908,47	2909,70	8,4636649	8,4638486
50	3199,22	3200,86	8,5050447	8,5052671
2	3489,95	3492,08	8,5428192	8,5430838
10	3780,65	3783,35	8,5775660	8,5778766
20	4071,31	4074,69	9,6097341	8,6100943
30	4361,94	4366,09	8,6396796	8,6400931
40	4652,53	4657,57	8,6676893	8,6681598
50	4943,08	4949,13	8,6938980	8,6945292
3	5233,60	5240,78	8,7188002	8,7193958
10	5524,06	5532,51	8,7422586	8,7429222
20	5814,48	5824,34	8,7645111	8,7652465
30	6104,85	6116,26	8,7856753	8,7864861
40	6395,17	6408,29	8,8058523	8,8067422
50	6685,44	6700,43	8,8251299	8,8261026
4	6975,65	6992,68	8,8435845	8,8446437
10	7265,80	7285,05	8,8612833	8,8624327
20	7555,89	7577,55	8,8782854	8,8795286
30	7845,91	7870,17	8,8946433	8,8959842
40	8135,87	8162,93	8,9104039	8,9118460
50	8425,76	8455,83	8,9256089	8,9271560
5	8715,57	8748,87	8,9402960	8,9419518
10	9005,32	9042,06	8,9544991	8,9562672
20	9294,99	9335,40	8,9682487	8,9701330
30	9584,58	9628,90	8,9815729	8,9835769
40	9874,08	9922,57	8,9944968	8,9966243
50	10163,51	10216,41	9,0070436	9,0092984
6	10452,85	10510,42	9,0192346	9,0216202
10	10742,10	10804,62	9,0310890	9,0336093
20	11031,26	11098,99	9,0426249	9,0452836
30	11320,32	11393,56	9,0538588	9,0566595
40	11609,29	11688,31	9,0648057	9,0677522
50	11898,16	11983,28	9,0754799	9,0785760

Степени. Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
89 60	100000,00	безконечна.	10,0000000	безконечанъ.
50	99999,58	34377371,00	9,9999982	12,5362727
40	99998,30	17188540,00	9,9999927	12,2352390
30	99996,19	11458865,00	9,9999835	12,0591416
20	99993,23	8593979,10	9,9999706	11,9341943
10	99989,42	6875008,70	9,9999542	11,8372733
88 60	99984,77	5728996,56	9,9999338	11,7580785
50	99979,27	4910388,06	9,9999100	11,6911158
40	99972,92	4296407,73	9,9999824	11,6331055
30	99965,73	3818845,93	9,9998512	11,5819321
20	99957,69	3436777,09	5,9998162	11,5341514
10	99948,81	3124157,67	9,9997776	11,4947329
87 60	99939,08	2863625,33	9,9997354	11,4569162
50	99928,51	2643159,96	9,9996894	11,4221234
40	99917,09	2454175,78	9,9996398	11,3899057
30	99904,82	2290376,55	9,9995865	11,3599059
20	99891,71	2147040,10	9,9995297	11,3318402
10	99877,75	2020555,35	9,9994688	11,3054708
86 60	99862,95	1908113,67	9,9994044	11,2806042
50	99847,31	1807497,74	9,9993364	11,2570778
40	99830,81	1716933,69	9,9992646	11,2347535
30	99813,48	1634985,55	9,9991892	11,2135139
20	99795,29	1560478,41	9,9991101	11,1932578
10	99776,27	1492441,70	9,9990272	11,1738074
85 60	99756,40	1430066,63	9,9989408	11,1553563
50	99735,69	1372673,79	9,9988506	11,1375673
40	99714,13	1319688,30	9,9987567	11,1204714
30	99691,73	1270620,47	0,9986491	11,1040158
20	99668,49	1225050,55	9,9985579	11,0881540
10	99644,40	1182616,67	9,9984529	11,0728440
84 60	99619,47	1143005,23	9,9983442	11,0580482
50	99593,60	1105943,10	9,9982318	11,0437328
40	99567,08	1071191,26	9,9981158	11,0293670
30	99539,62	1038539,71	9,9979960	11,0164231
20	99511,32	1007803,11	9,9978725	11,0033757
10	99442,17	978817,32	9,9977453	10,9907016
83 60	99452,18	951436,45	9,9976143	10,9783798
50	99421,36	925530,35	9,9974797	10,9663907
40	99489,69	900982,61	9,9993414	10,9547164
30	99357,18	877688,74	9,9971993	10,9433405
20	99323,83	855554,68	9,9970535	10,9322478
10	99289,64	834495,57	9,9969040	10,9214240

Степени. Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
7	12186,93	12278,46	9,0858945	9,0891438
10	12475,60	12573,84	9,0960615	9,0994678
20	12764,16	12869,43	9,1059924	9,1095594
30	13052,62	13165,25	9,1156977	9,1194291
40	13340,96	13461,29	9,1251872	9,1290868
50	13629,19	13757,57	9,1344702	9,1385417
8	13917,31	14054,08	9,1435553	9,1478025
10	14205,31	14250,84	9,1524507	9,1568773
20	14493,19	14647,84	9,1611639	9,1657737
30	14780,94	14945,10	0,1697021	9,1744988
40	15068,57	15242,61	9,1780721	9,1830595
50	15356,07	15540,40	9,1862802	9,1914621
9	15643,45	15838,44	9,1943324	9,1997125
10	15930,69	16136,77	9,2022345	9,2078165
20	16217,79	16434,37	9,2099917	9,2157795
30	16504,76	16734,26	9,2176092	9,2236005
40	16791,59	17033,44	9,2250918	9,2313024
50	17078,28	17332,92	9,2324440	9,2383717
10	17364,82	17632,70	9,2396702	9,2463188
10	17651,21	17932,78	9,2467746	9,2536477
20	17937,46	18233,18	9,2537609	9,2608625
30	18223,55	18533,90	9,2606330	9,2679669
40	18509,49	18334,95	9,2673945	9,2749644
50	18795,26	19136,32	9,2740487	9,2818585
11	19080,90	19438,03	9,2805988	9,2886523
10	19366,36	19740,08	9,2870480	9,2953489
20	19651,66	20042,48	9,2933993	9,3019514
30	19936,79	20345,23	9,2996553	9,3084626
40	20221,76	20648,34	9,3058189	9,3148851
50	20506,55	20951,81	9,3118926	9,3212216
12	20791,17	21255,65	9,3178789	9,3274745
10	21075,61	21559,88	9,3237802	9,3336463
20	21359,88	21864,48	9,3295988	9,3397391
30	21643,96	22169,47	9,3353368	9,3457552
40	21927,86	22474,85	9,3409963	9,3516968
50	22211,58	22780,63	9,3455794	9,3575658
13	22495,11	23086,82	9,3520880	9,3633641
10	22778,44	23393,42	9,3575240	9,3690937
20	23061,59	23700,44	9,3628892	9,3747563
30	23344,54	24007,87	9,3681853	9,3803537
40	23627,29	24315,75	9,3734139	9,3858876
50	23909,84	24624,05	9,3785767	9,3913595

Степени. Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
82 60	99254,62	814434,64	9,9967507	10,9108562
50	99218,74	795302,24	9,9965937	10,9005322
40	99182,03	777035.06	9,9964330	10,8904406
30	99144,49	759575,41	9,9962686	10,8805709
20	99106,09	742870,64	9,9961004	10,8709132
10	99066,87	726872,55	9,9959284	10,8614583
81 60	99026,80	711536,97	9,9957528	10,8521975
50	98985,90	696823,35	9,9955734	10,8431227
40	98944,16	682694,37	9,9953902	10,8342263
30	98901,58	669115,62	9,9952033	10,8255012
20	98858,17	656055,38	9,9950126	10,8169405
10	98813,92	643484,28	9,9948181	10,8085379
80 60	98763,83	631375,15	9,9946199	10,8002875
50	98722,91	619702,79	9,9944180	10,7921835
40	98676,15	608443,81	9,9942122	10,7842205
30	98628,56	597576,44	9,9940027	10,7763935
20	98580,12	587080,42	9,9937894	10,7686976
10	98530,87	576936,88	9,9935723	10,7611283
79 60	98480,77	567128,18	9,9933515	10,7536812
50	98429,85	557637,86	9,9931268	10,7463523
40	98378,08	548450,52	9,9928984	10,7391375
30	98325,49	539551,72	9,9926661	10,7320331
20	98272,06	530927,93	9,9924301	10,7250356
10	98217,81	522566,47	9,9921905	10,7181415
78 60	98162,71	514455,40	9,9919466	10,7113477
50	98106,80	506583,52	9,9916991	10,7046511
40	98050,05	498940,27	9,9914478	10,6986486
30	97992,47	491515,70	6,9911927	10,6915374
20	97934,06	484300,45	9,9909338	10,6851149
10	97874,83	477585,67	9,9906710	10,6787784
77 60	97814,76	474063,01	9,9904044	10,6725255
50	97753,86	463824,57	9,9901339	10,6663537
40	97692,15	457362,87	9,9898597	10,6602609
30	97629,60	451070,85	9,9895815	10,6542448
20	97566,23	444941,81	9,9892995	10,6483032
10	97502,03	438969,40	9,9890137	10,6424342
76 60	97437,01	433147,59	9,9887239	10,6366359
50	97371,16	427470,66	9,9884303	10,6309063
40	97304,48	421933,18	9,9881329	10,6252437
30	97236,99	416529,96	9,9878315	10,6196463
20	97168,67	411256,14	9,9875263	10,6141124
01	97099,54	406107,00	9,9872171	10,6086405

Степени. Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
14	24192,19	24932,80	9,3836752	9,3967711
10	24474,33	25242,00	9,3887109	9,4021237
20	24756,27	25551,65	9,3936852	9,4074189
30	25038,00	25861,76	9,3985996	9,4126581
40	25319,52	26172,34	9,4034554	9,4178425
50	25600,82	26483,39	9,4082539	9,4229735
15	25881,90	26794,92	9,4129962	9,4280525
10	26162,77	27106,93	9,4176837	9,4330804
20	26443,42	27419,44	9,4223176	9,4380587
30	26723,84	27732,45	9,4268988	9,4429883
40	27004,03	28045,97	9,4314286	9,4478704
50	27284,00	28359,99	9,4359080	9,4527061
16	27563,74	28674,54	9,4403381	9,4574964
10	27843,24	28989,61	9,4447197	9,4622423
20	28122,51	29305,21	9,4490540	9,4669448
30	28401,53	29621,35	9,4533418	9,4716048
40	28680,32	29938,03	9,4575840	9,4762233
50	28958,87	30255,27	9,4617816	9,4808011
17	29237,17	30573,07	9,4659353	9,4853390
10	29515,22	30891,43	9,4700461	9,4898380
20	29793,03	31210,36	9,4741146	9,4942988
30	30070,58	31529,88	9,4781418	9,4987223
40	30347,88	31849,98	9,4821283	9,5031092
50	30624,92	32170,67	9,4860749	9,5074602
18	30901,70	32491,97	9,4899824	9,5117760
10	31178,22	32813,87	9,4938513	9,5160572
20	31454,48	33136,39	9,4976824	9,5203052
30	31730,47	33459,53	9,5014764	9,5245199
40	32006,19	33783,30	9,5052339	9,5257021
50	32281,64	34107,71	9,5089556	9,5328326
19	32556,82	34432,76	9,5126419	9,5269719
10	32831,72	34758,46	9,5162936	9,5410606
20	33106,34	35084,83	9,5199112	9,5451193
30	33380,69	35411,86	9,5234953	9,5491487
40	33654,75	35739,56	9,5270463	9,5531492
50	33928,53	36067,95	9,5305650	9,5571214
20	34202,02	36397,02	9,5340517	9,5619659
10	34475,22	36726,80	9,5375069	9,5649831
20	34748,13	37057,28	9,5409314	9,5688735
30	35020,74	37388,47	9,5443253	9,5527377
40	35293,06	37720,38	9,5476893	9,5765761
50	35565,08	38053,03	9,5510237	9,5803892

Степени. Минута.	Нѣдри-ште.	Дирка.	Логари-тамъ нѣ-дришта.	Логари-тамъ дир-ке.
75 60	97029,57	401078,09	9,9869041	10,6032289
50	96958,79	396165,18	9,6865872	10,5978763
40	96887,18	391364,20	9,9862663	10,5925811
30	96814,76	386671,31	9,9859416	10,5873419
20	96741,52	382082,81	9,9856129	10,5821575
10	96667,46	377595,19	9,9852803	10,5770265
74 60	96592,58	373205,08	9,9849438	10,5719475
50	96516,88	368909,27	9,9846033	10,5669196
40	96440,37	364704,67	9,9842589	10,5619417
30	96363,05	360588,35	9,9839105	10,5570113
20	96284,90	356557,49	9,9835582	10,5521296
10	96205,94	352609,38	9,9832019	10,5472939
73 60	96126,17	348741,44	9,9828416	10,5425036
50	96045,58	344951,20	9,9824774	10,5377577
40	95964,18	341236,26	9,9821092	10,5330552
30	95881,97	337594,34	9,9817370	10,5282952
20	95798,95	334023,26	9,9813608	10,5237767
10	95715,12	330520,91	9,9809805	10,5191989
72 60	95630,48	327085,26	9,9805963	10,5146610
50	95545,02	323714,38	9,9802081	10,5101620
40	95458,76	320406,38	9,9798158	10,5057012
20	95371,69	317159,48	9,9794195	10,5012777
20	95283,82	313971,94	9,9790192	10,4968908
10	95195,14	310842,10	9,9786148	10,4925398
71 60	95105,65	307768,35	9,9782063	10,4882240
50	95015,36	304749,15	9,9777938	10,4839425
40	94924,26	301783,01	9,9773772	10,4796948
30	94832,36	298868,50	9,9769566	10,4754801
20	94739,66	296004,22	9,9765318	10,4712979
10	94646,16	293188,85	9,6761030	10,4671474
70 60	94551,85	290421,09	9,9756701	10,4630281
50	94456,75	287699,70	9,9752330	10,4589394
40	94360,85	285023,49	9,9747918	10,4548807
30	94264,15	282391,29	9,9743466	10,4503513
20	94166,65	279801,98	9,9738971	10,4468508
10	94068,35	277254,48	9,9734435	10,4428786
69 60	93969,26	274747,47	9,9729858	10,4389341
50	93869,37	272280,75	9,9725239	10,4350169
40	93768,69	269852,54	9,9720579	10,4311265
30	93667,22	267462,15	9,9715876	10,4272623
20	93564,95	265108,67	9,9711132	10,4234239
10	93461,89	262791,21	9,9706346	10,4196108

Степени. Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
21	35836,79	38386,40	9,5543292	9,5841774
10	36108,21	38720,53	9,5576060	9,5879413
20	36379,32	39055,41	9,5608546	9,5916812
30	36650,13	39391,05	9,5640754	9,5953975
40	36920,62	39727,46	9,5672689	9,5990903
50	37190,80	40064,65	9,5704355	9,6027613
22	37460,66	40402,62	9,5735754	9,6064096
10	37730,21	40741,39	9,5766892	9,6100359
20.	37999,44	41080,97	9,5797772	9,6133407
30	38268,34	41421,36	9,5828397	9,6172243
40	38536,93	41762,57	9,5858771	9,6207872
50	38805,18	42104,60	9,5888897	9,6243296
23	39073,11	42447,49	9,5918780	9,6278519
10	39340,71	42791,20	9,5948422	9,6313545
20	39607,98	43135,79	9,5977827	9,6348378
30	39874,91	43481,24	9,6006997	9,6383019
40	40141,50	43827,56	9,6035936	9,6417473
50	40407,75	44174,76	9,6064047	9,6451743
24	40973,66	44522,87	9,6093133	9,6485831
10	40939,23	44871,87	9,6121397	9,6519742
20	41204,46	45221,79	9,6149441	9,6553477
30	41469,32	45572,64	9,6177270	9,6587041
40	41733,85	45924,39	9,6204884	9,6620434
50	41998,01	46277,09	9,6232287	9,6653662
25	42161,83	46630,77	9,6259483	9,6686725
10	42525,28	46985,39	9,6289472	9,6719628
20	42788,38	47340,98	9,6313258	9,6752372
30	43051,11	47697,55	9,6339844	9,6784961
40	43313,48	48055,12	9,6366231	9,6817396
50	43575,48	48413,68	9,6392420	9,6849681
26	43837,12	48773,26	9,6408420	9,6881818
10	44098,38	49133,86	9,6444226	9,6913809
20	44359,27	49495,49	9,6469844	9,6945656
30	44619,78	49858,16	9,6495274	9,6977363
40	44879,92	50221,89	9,6520521	9,7008930
50	45139,68	50586,68	9,6545584	9,7040362
27	45399,05	50952,54	9,7570468	9,7071659
10	45658,04	51319,50	9,6595173	9,7102824
20	45916,64	51687,55	9,6619701	9,7133859
30	46174,86	52056,70	9,6644056	9,7164767
40	46432,69	52426,98	9,6668238	9,7195549
50	46690,12	52798,39	9,6692250	9,7226207

Степени. Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
68 60	93358,04	260508,91	9,9701517	10,4158226
50	93253,40	258260,94	9,9696647	10,4120587
40	93147,97	256046,49	9,9691734	10,4083188
30	93041,75	253864,79	9,9686779	10,4046025
20	92934,75	251715,07	9,9681781	10,4009092
10	92826,96	249596,61	9,9676741	10,3972387
67 60	92718,39	247508,69	9,9671659	10,3935904
50	92609,03	245450,61	9,9666533	10,3899641
40	92498,88	243421,72	9,9661365	10,3863593
30	92387,95	241421,36	9,9656153	10,3827757
20	92276,24	239448,89	9,9650899	10,3792128
10	92163,75	237503,72	9,9645602	10,3756704
66 60	92050,49	235585,24	9,9640261	10,3721481
50	91936,44	233692,87	9,9634877	10,3686455
40	91821,61	231826,06	9,9629449	10,3651622
30	91706,01	229984,25	9,9623978	10,3616981
20	91589,63	228166,93	9,9618463	10,3582527
10	91472,47	226373,57	9,9612904	10,3548257
65 60	91354,54	224603,68	9,9607302	10,3514169
50	91235,84	222856,76	9,9601655	10,3480258
40	91116,37	221132,34	9,9595964	10,3446523
30	90996,13	219429,97	9,9590229	10,3412960
20	90875,11	217749,20	9,9584450	10,3379566
10	90753,33	216089,58	9,9578626	10,3346338
64 60	90630,78	214450,69	9,9572757	10,3313275
50	90507,46	212832,13	9,9566844	10,3280372
40	90383,38	211233,48	9,9560886	10,3247628
30	90258,53	209654,36	9,9554882	10,3215039
20	90132,91	208094,38	9,9548834	10,3182604
10	90006,54	206553,18	9,9542741	10,3150319
63 60	89879,40	205030,38	9,9536602	10,3118182
50	89751,51	203525,65	9,9530418	10,3086191
40	89622,85	201038,62	9,9524188	10,3054344
30	89493,43	200568,97	9,9517912	10,3022637
20	89363,27	199116,37	9,9511590	10,2991070
10	89232,33	197680,50	9,9505223	10,2959638
62 60	89106,65	196261,05	9,9498809	10,2928341
50	88968,21	194857,71	9,9492349	10,2897176
40	88835,02	193470,20	9,9485842	10,2866141
30	88701,08	192098,21	9,9479289	10,2835233
20	88566,39	190741,47	9,9472689	10,2804451
10	88430,95	189399,71	9,9466043	10,2773793

Степени. Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
28	46947,16	53170,94	9,6716093	9,7256744
10	47203,80	53544,65	9,9739769	9,7287161
20	47460,04	53919,52	9,6763281	9,7317460
30	47715,88	54295,57	9,6786629	9,7347644
40	47971,31	54672,81	9,6809816	9,7377714
50	48226,34	55051,25	9,6832843	9,7407672
29	48480,96	55430,90	9,6855712	3,7437520
10	48735,17	55811,79	9,6878425	9,7467259
20	48988,97	56193,91	9,6900983	9,7496892
30	49242,36	56577,28	9,6923388	9,7526420
40	49495,33	56961,91	9,6945642	9,7555846
50	49747,87	57347,83	9,6967745	9,7585170
30	500000,0	57735,03	9,6989700	9,7614394
10	50251,70	58123,53	9,7011508	9,7643520
20	50502,99	58513,35	9,7033170	9,7672550
30	50753,84	58904,50	9,7054689	9,7701485
40	51004,26	59296,99	9,7076064	9,7730327
50	51254,25	59690,84	9,7097299	9,7759077
31	51503,81	60086,06	9,7118393	9,7787737
10	51752,93	60482,66	9,7139349	9,7816309
20	52001,61	60880,67	9,7160168	9,7844794
30	52249,86	61280,08	9,7180851	9,7873193
40	52497,66	61680,92	9,7201399	9,7901508
50	52745,02	62083,20	9,7221814	9,7929741
32	52991,93	62486,94	9,7242097	9,7957892
10	53238,39	62892,15	9,7262249	9,7985964
20	53484,40	63298,83	9,7282271	9,8013957
30	53729,96	63707,03	9,7302165	9,8041873
40	53975,07	64116,73	9,7321932	9,8069714
50	54219,71	64527,97	9,7341572	9,8097480
33	54463,90	64940,76	9,7361088	9,8125174
10	54707,63	65355,11	9,7380479	9,8152795
20	54950,90	65771,03	9,7399748	9,8180347
30	55193,70	66188,56	9,7418895	9,8207829
40	55436,03	66607,69	9,7437921	9,8235244
50	55677,90	67028,45	9,7456828	9,8262592
34	55915,29	67450,85	9,7475617	9,8289874
10	56160,21	67874,92	9,7494287	9,8317093
20	56400,65	68300,66	9,7512842	9,8344249
30	56640,62	68728,10	9,7531280	9,8371349
40	56880,11	69157,24	9,7549604	9,8398377
50	57119,12	69588,13	9,7567815	9,8425351

Степени. Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
61 60	88294,76	188072,65	9,9459349	10,2743256
50	88157,82	186760,03	9,9452609	10,2712839
40	88020,14	185461,59	9,9445821	10,2682540
30	87881,71	184177,09	9,9438985	10,2652356
20	87742,54	182906,28	9,9432102	10,2622286
10	87602,62	181648,92	9,9425171	10,2692328
60 60	87461,97	180404,78	9,9418193	10,2562480
50	87320,58	174173,73	9,9411166	10,2532741
40	87178,44	177955,24	9,9404091	10,2503108
30	87035,57	176749,70	9,9396968	10,2473580
20	86891,69	175555,90	9,9389796	10,2444154
10	86747,62	174374,53	9,9382576	10,2414830
59 60	86602,54	173205,08	9,9375306	10.2385606
50	86456,73	172047,36	9,9367988	10,2356480
40	86310,12	170901,16	9,9360621	10,2327450
30	86162,92	169766,31	9,9353204	10,2298515
20	86014,91	168642,61	9,9345738	10,2269673
10	85866,18	167529,88	9,9338222	10,2240923
58 60	85716,73	166427,95	9,9330656	10,2212263
50	85566,55	165336,63	9,9323040	10,2183691
40	85415,64	164255,76	9,9315374	10,2155206
30	85264,02	163185,17	9,9307658	10,2126807
20	85111,66	162124,69	9,9299891	10,2098492
10	84958,60	161074,17	9,9292073	10,2070259
57 60	84804,81	160033,45	9,9284205	10,2042108
50	84650,30	159002,38	9,9276285	10,2014036
40	84495,08	157980,79	9,9268314	10,1983248
30	84339,14	156968,56	9,9260292	10,1958127
20	84182,49	155965,52	9,9252218	10,1930286
10	84025,13	154971,55	9,9244092	10,1902520
56 60	83867,06	153986,50	9,9235914	10,1874826
50	83708,27	153010,23	9,9227684	10,1847205
40	83548,78	152042,61	9,9219401	10,1819653
30	83388,58	151083,52	9,9211066	10,1792171
20	83227,68	150132,82	9,9202678	10,1764756
10	83066,07	149190,38	9,9194237	10,1737408
55 60	82903,76	148256,10	9,9185742	10,1710126
50	82740,74	147329,83	9,9177194	10,1682907
40	82577,03	146411,47	9,9168593	10,1655751
30	82412,62	145500,90	9,9159937	10,1628657
20	82247,51	144598,01	9,9151228	10,1601623
10	82081,70	143702,68	9,9142464	10,1574649

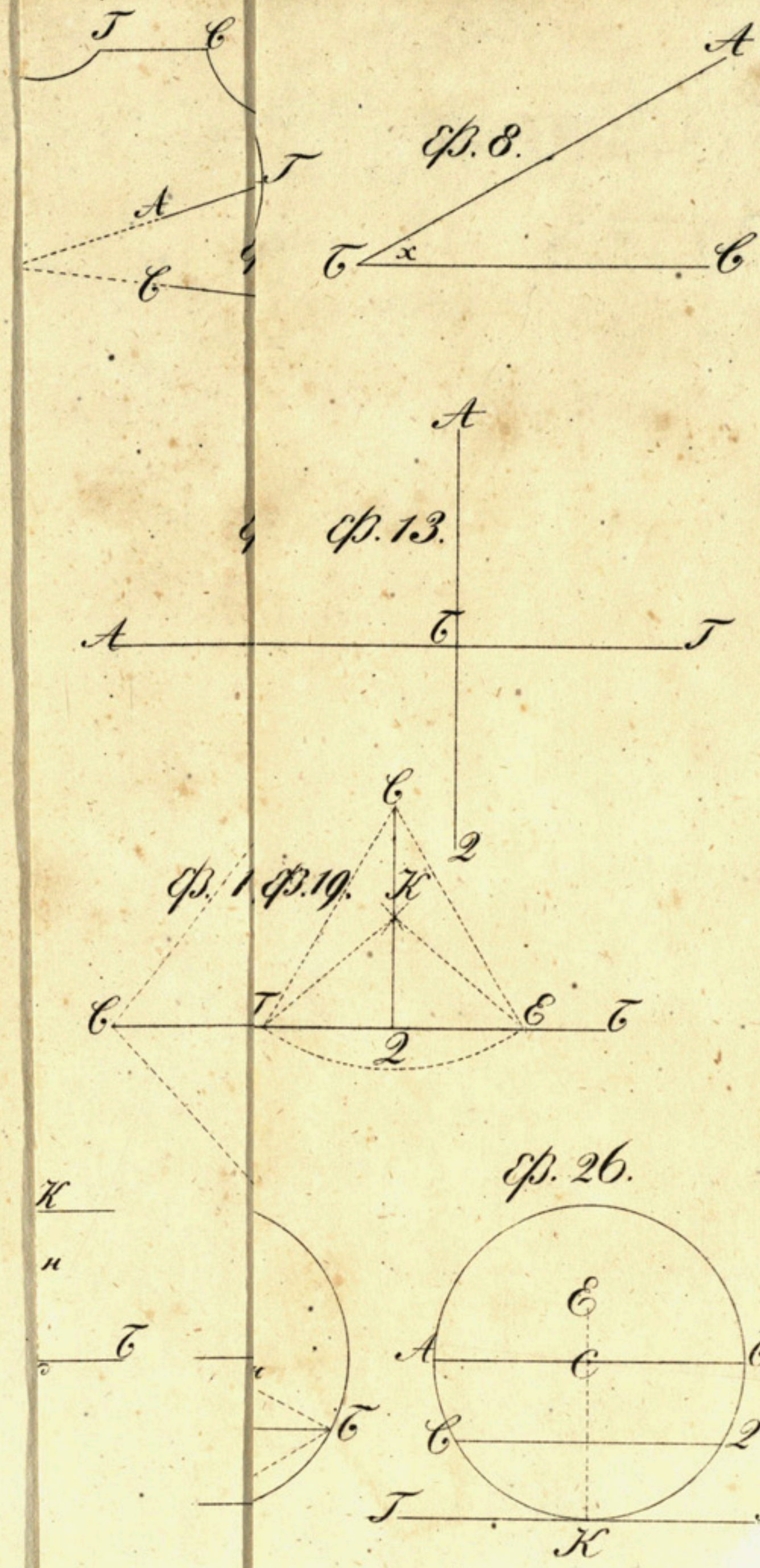
Степени. Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
35	57357,64	70020,75	9,7585913	9,8452268
10	57595,68	70455,15	9,7603899	9,8479127
20	57833,23	70891,33	9,7621775	9,8505931
30	58070,30	71329,31	9,7639540	9,8532680
40	58306,87	71769,11	9,7657197	9,8559376
50	58542,94	72210,75	9,7674746	9,8586019
36	58778,53	72654,26	9,7692187	9,8612610
10	59013,61	73099,63	9,7709522	9,8639152
20	59248,19	73546,91	9,7726751	9,8665644
30	59482,28	73996,11	9,7743876	9,8692089
40	59715,86	74447,24	9,7760897	9,8718486
50	59948.93	74900,33	9,7777815	9,8744838
37	60181,50	75355,40	9,7794630	9,8771144
10	60413,56	75812,48	9,7811344	9,8797407
20	60645,11	76271,57	9,7827958	9,8823627
30	60875,14	76732,70	9,7844471	9,8849805
40	61109,66	77195,89	9,7860886	9,8875942
50	61336,66	77661,17	9,7877202	9,8902040
38	61566,15	78128,56	9,7893420	9,8928098
10	61795,11	78598,08	9,7909541	9,8954119
20	62023,55	79069,75	9,7925566	9,8930104
30	62251,46	79543,59	9,7941496	9,9006052
40	62478,85	80019,63	9,7957330	9,9031966
50	62705,71	80497,90	9,7973071	9,9057845
39	62932,04	80978,40	9,7988718	9,9083692
10	63157,84	81461,18	9,8004272	9,9106507
20	63383,09	81946,25	9,8019735	9,9135291
30	63607,82	82433,64	9,8035105	9,9161045
40	63832,01	82923,37	9,8050385	9,9186769
50	64055,66	83415,47	9,8065575	9,9212466
40	64278,76	83909,96	9,8080675	9,9238135
10	64501,32	84406,88	9,8095686	9,9263778
20	64723,34	84906,24	9,8110609	9,9289396
30	64944,80	85408,07	9,8125444	9,9314989
40	65165,72	85912,40	9,8140192	9,9340559
50	65386,09	86419,26	9,8154854	9,9366105
41	65605,90	86928,68	9,8169429	9,9391631
10	65825,16	87440,67	9,8183919	9,9417135
20	66043,86	87955,28	9,8198325	9,9442619
30	66262,01	88472,53	9,8212646	9,9468084
40	66479,59	88992,45	9,8226883	9,9493531
50	66696,61	89515,06	9,8241037	9,9518961

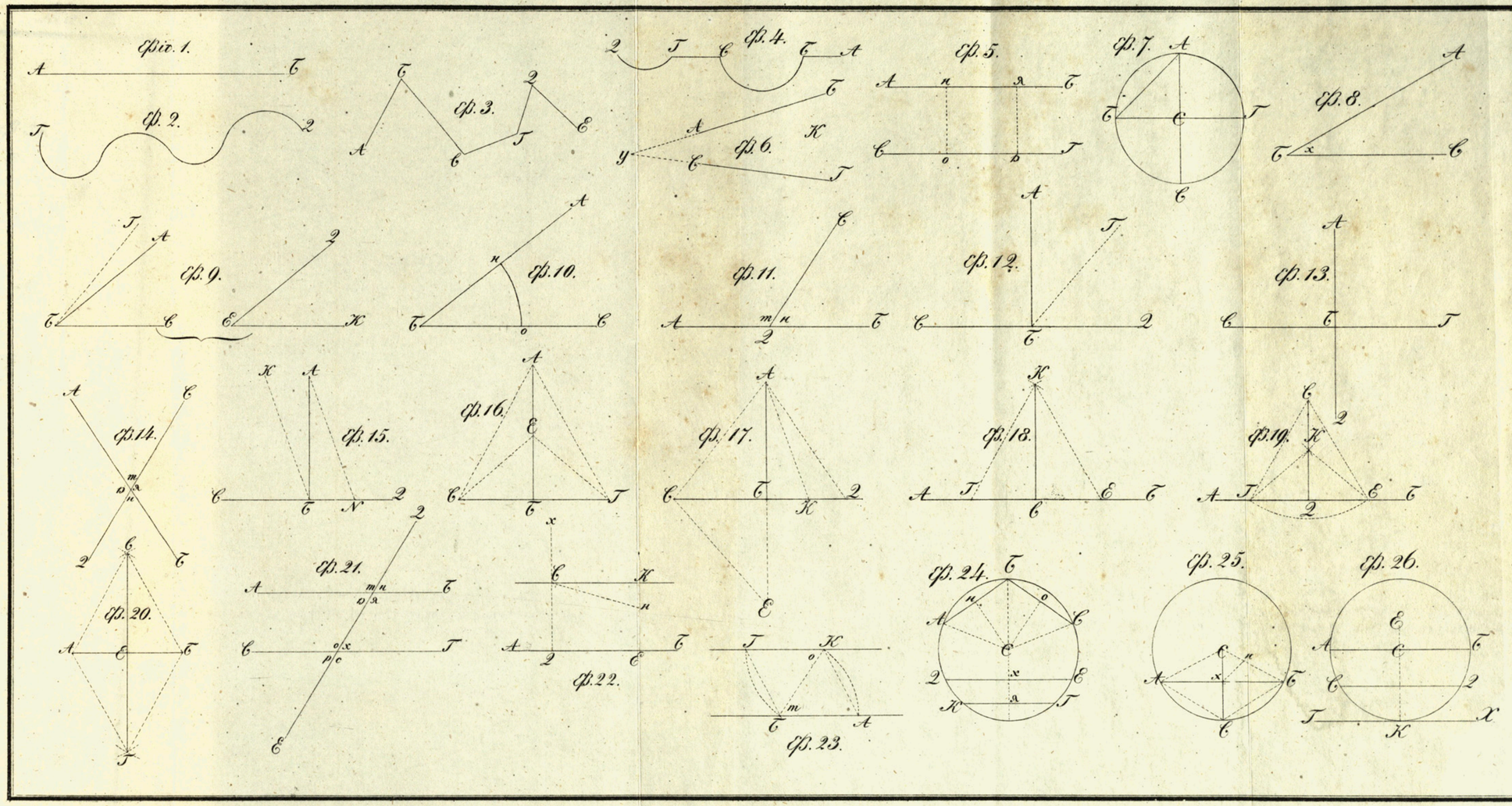
Степени. Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
54 60	81915,21	142814,80	9,9133645	10,1547732
50	81748,01	141934,27	9,9124772	10,1520873
40	81580,13	141060,98	9,9115844	10,1494069
30	81411,55	140194,83	9,9106860	10,1467320
20	81242,29	139335,71	9,9097821	10,1440624
10	81072,33	138483,53	9,9088727	10,1413681
53 60	80901,70	137638,19	9,9079576	10,1387390
50	80730,38	136799,59	9,9070370	10,1360848
40	80558,37	135967,64	9,9061107	10,1334356
30	80385,69	135142,24	9,9051787	10,1307911
20	80212,32	134323,31	9,9042411	10,1281514
10	80038,27	133510,75	9,9032977	10,1255162
52 60	79869,55	132704,48	9,9023486	10,1228856
50	79688,15	131904,41	9,9013938	10,1202593
40	79512,08	131110,46	9,9004331	10,1176373
30	79335,33	130322,54	9,8994667	10,1150195
20	79157,92	129540,57	9,8984944	10,1124058
10	78979,83	128764,47	9,8975162	10,1097960
51 60	78801,07	127994,16	9,8965321	10,1071902
50	78621,65	127229,57	9,8955422	10,1045881
40	78441,57	126470,62	9,8945463	10,1019896
30	78260,82	125717,23	9,8935444	10,0993948
20	78079,40	124369,33	9,8925365	10,0968034
10	77897,33	124226,85	9,8915226	10,0942155
50 60	77714,60	123489,72	9,8905026	10,0916308
50	77531,21	122757,86	9,8894765	10,0890493
40	77347,16	122031,21	9,8884444	10,0804709
30	77162,46	121309,70	9,8874061	10,0838955
20	76977,10	120593,27	9,8863616	10,0813231
10	76791,10	119881,84	9,8853109	10,0787534
49 60	76604,44	119175,36	9,8842540	10,0761865
50	76417,14	118473,76	9,8831908	10,0736222
40	76229,19	117776,98	9,8821213	10,0710604
30	76040,60	117084,96	9,8810455	10,0685011
20	75851,36	116397,63	9,8799634	10,0659441
10	75661,47	115714,95	9,8788748	10,0633895
48 60	75470,96	115036,34	9,8777799	10,0608369
50	75279,80	114363,26	9,8766785	10,0582865
40	75088,00	113694,14	9,8755706	10,0557381
30	74895,57	113029,44	9,8744561	10,0531916
20	74702,51	112369,09	9,8733352	10,0506469
10	74508,81	111713,05	9,8722076	10,0481039

Степени. Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
42	66913,06	90040,41	9,8255109	9,9544374
10	67128,95	90568,51	9,8269098	9,9569772
20	67344,27	91099,41	9,8283006	9,9595155
30	67559,02	91633,12	9,8296833	9,9620525
40	67773,20	92169,68	9,8310580	9,9645881
50	67986,81	92709,14	9,8324246	9,9671225
43	68199,84	93251,51	9,8337833	9,9696559
10	68412,29	93796,83	9,8351341	9,9721882
20	68624,16	94345,13	9,8364771	9,9747195
30	68835,45	94896,46	9,8378122	9,9772500
40	69046,17	95450,83	9,8391396	9,9797797
50	69256,30	96008,29	9,8404593	9,9823087
44	69465,84	96568,88	9,8417713	9,9848372
10	69674,79	97132,62	9,8430757	9 9873651
20	69883,15	97699,56	9,8443725	9,9898926
30	70090,93	98269,73	9,8456610	9,9924197
40	70298,10	98843,16	9,8469430	9,9949466
50	70504,69	99419,91	9,8482180	9,9974734
45	70710,68	100000,00	9,8494850	10,0000000

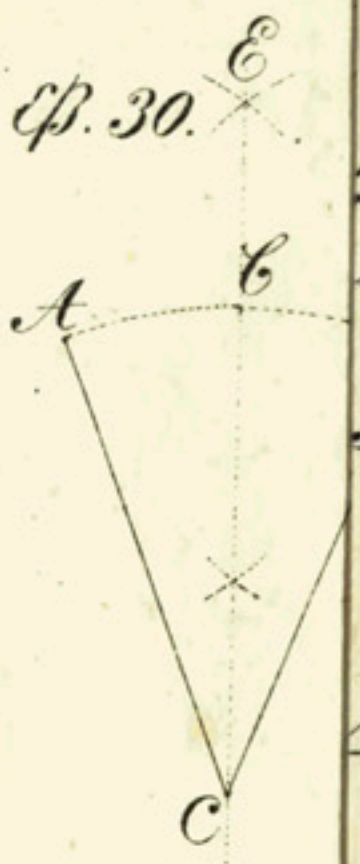
Степени. Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
47 60	74314,48	111061,25	9,8710735	10,0455626
50	74119,53	110413,65	9,8699326	10,0430228
40	73923,94	109770,20	9,8687851	10,0404845
30	73727,73	109130,85	9,8676309	10,0379475
20	73530,90	108495,54	9,8664699	10,0354119
10	73333,45	107864,23	9,8653021	10,0328775
46 60	73135,37	107236,87	9,8641275	10,0303441
50	72936,67	106613,41	9,8629466	10,0278118
40	72737,36	105993,81	9,8617576	10,0252805
30	72537,44	105378,01	9,8605622	10,0227500
20	72336,90	104765,98	9,8593599	10,0202203
10	72135,74	104157,67	9,8581505	10,0176913
45 60	71933,98	103553,03	9,8569341	10,0151628
50	71731,61	102952,03	9,8557106	10,0126349
40	71528,63	102354,61	9,8544799	10,0101074
30	71325,05	101760,74	9,8532421	10,0075803
20	71120,86	101170,37	9,8519970	10,0050534
10	70916,07	100583,47	9,8507446	10,0025266
44 60	70710,68	100000,00	9,8494850	10,0000000

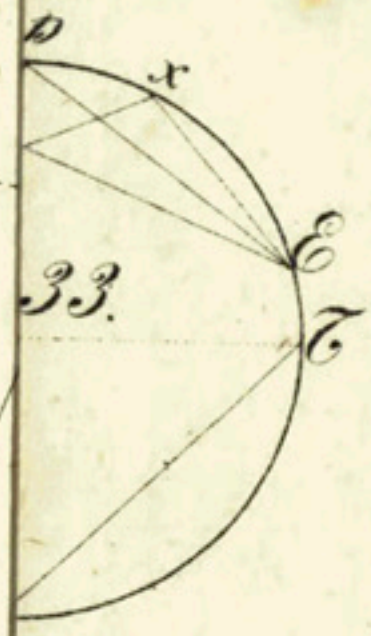
S. BANOTEKA
MATEMATIČKOG ODSEKA

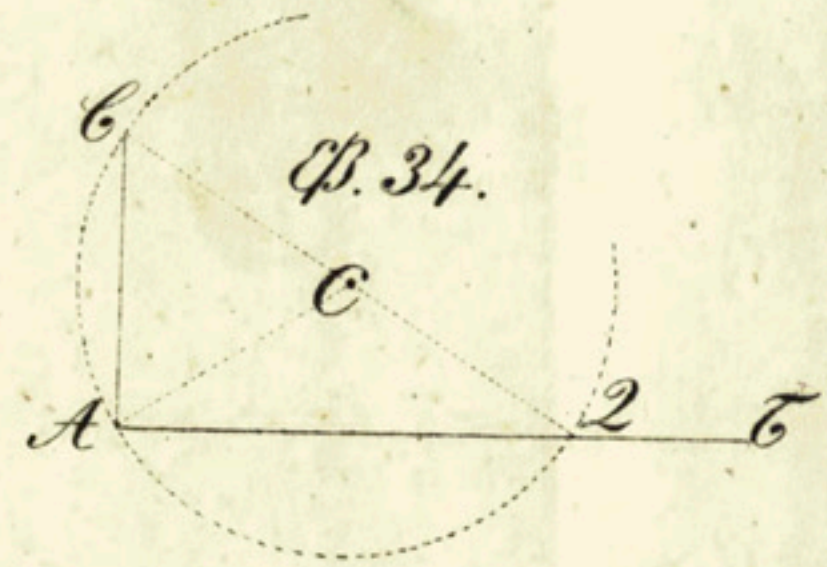

Т
С
А
Т
А
С
Фиг. 8.
А
С
х
С
Фиг. 13.
А
А
С
Т
2
Фиг. 1, Фиг. 19.
С
К
С
Т
Е
С
2
Фиг. 26.
К
и
С
Т
А
С
С
2
Т
х
К

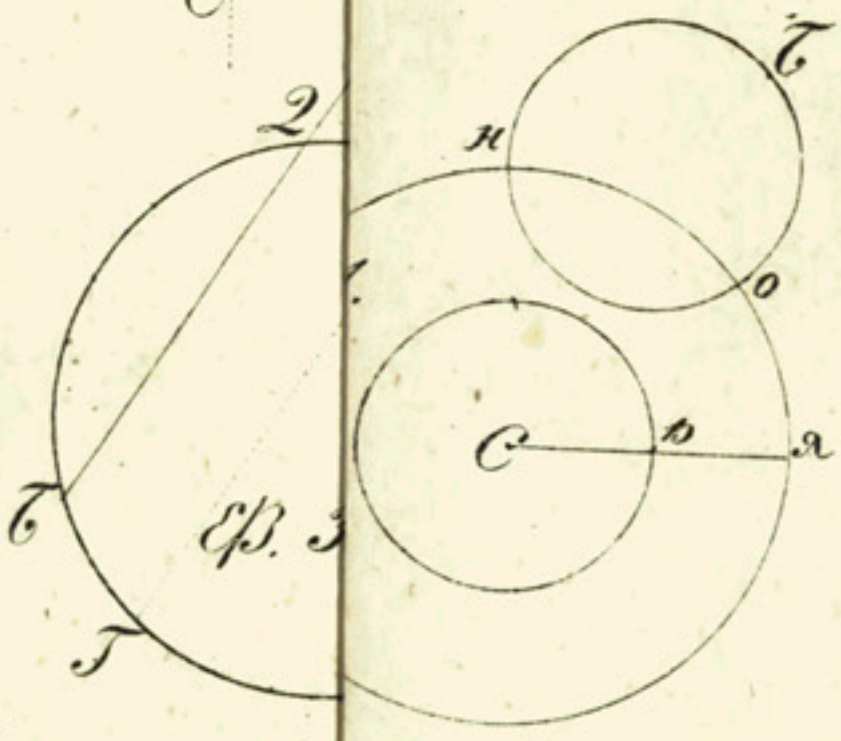

Фиг. 1.
Фиг. 2.
Фиг. 3.
Фиг. 4.
Фиг. 5.
Фиг. 6.
Фиг. 7.
Фиг. 8.
Фиг. 9.
Фиг. 10.
Фиг. 11.
Фиг. 12.
Фиг. 13.
Фиг. 14.
Фиг. 15.
Фиг. 16.
Фиг. 17.
Фиг. 18.
Фиг. 19.
Фиг. 20.
Фиг. 21.
Фиг. 22.
Фиг. 23.
Фиг. 24.
Фиг. 25.
Фиг. 26.

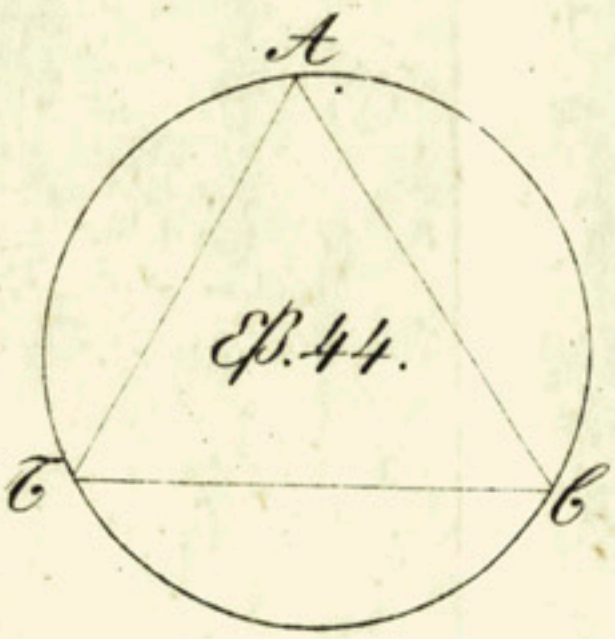
Ep. 30.

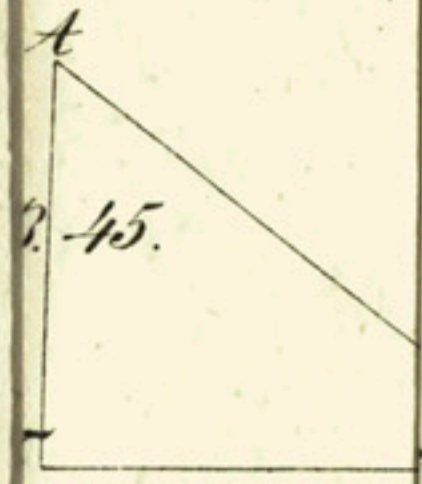

E
A
C
C

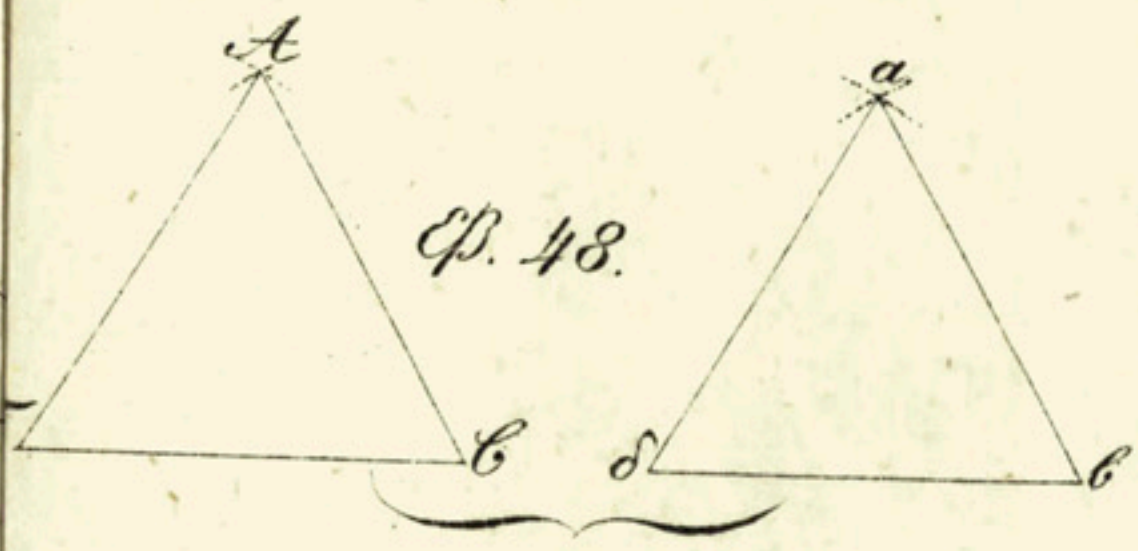

p
x
E
33.
T


C
Ep. 34.
C
A
2
T


T
2
K
O
C
D
R
6
Ep. 3
F

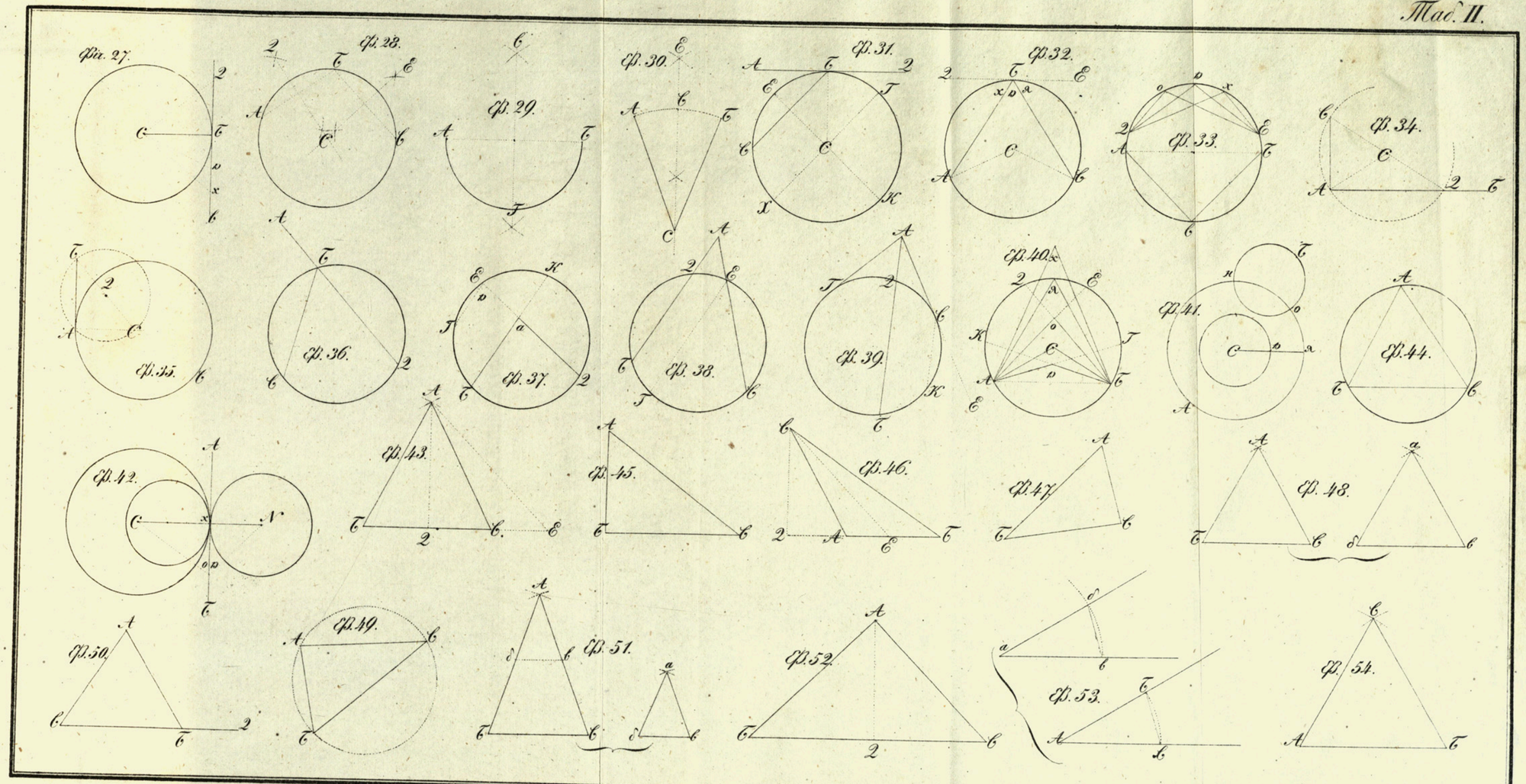

A
Ep. 44.
6
6


t
p. 45.

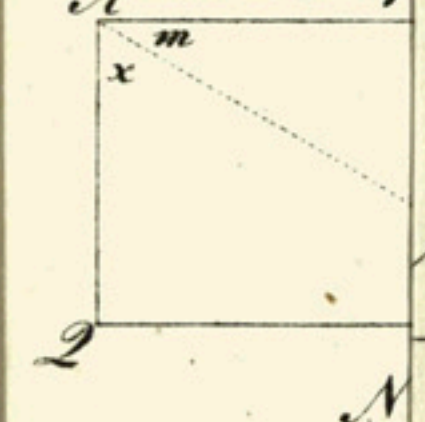

A
Ep. 48.
C
a
8
6

p. 51.
a
8
6

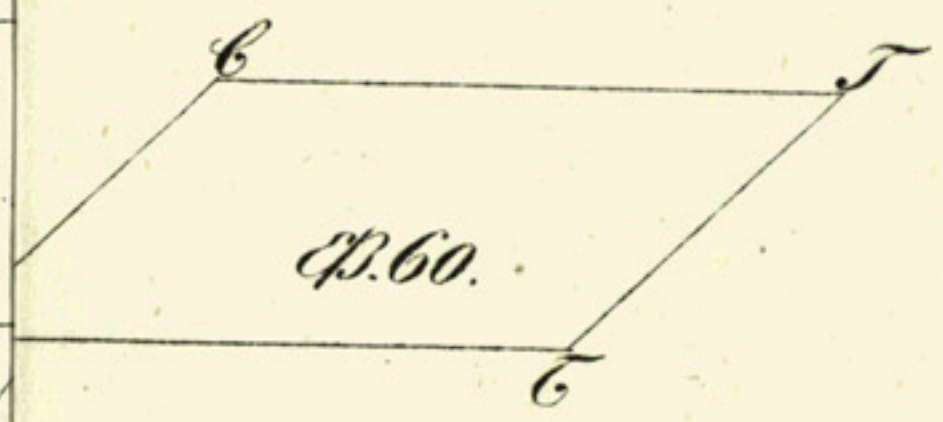
6
Ep. 54.
A
T


Фиг. 27.
Фиг. 28.
Фиг. 29.
Фиг. 30.
Фиг. 31.
Фиг. 32.
Фиг. 33.
Фиг. 34.
Фиг. 35.
Фиг. 36.
Фиг. 37.
Фиг. 38.
Фиг. 39.
Фиг. 40.
Фиг. 41.
Фиг. 42.
Фиг. 43.
Фиг. 44.
Фиг. 45.
Фиг. 46.
Фиг. 47.
Фиг. 48.
Фиг. 49.
Фиг. 50.
Фиг. 51.
Фиг. 52.
Фиг. 53.
Фиг. 54.

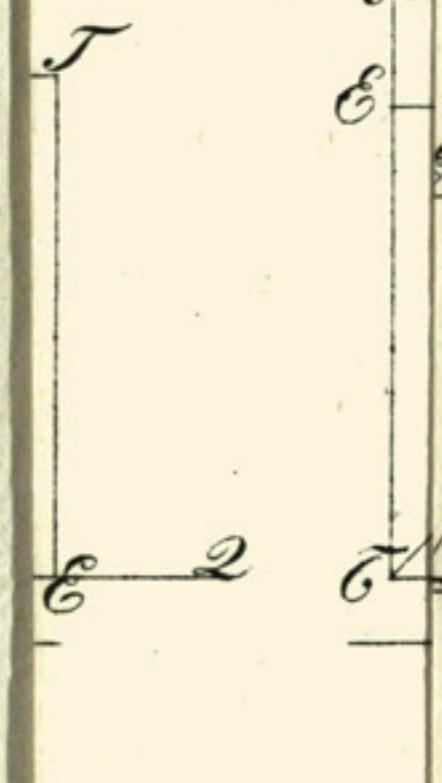
Фиг. 59.

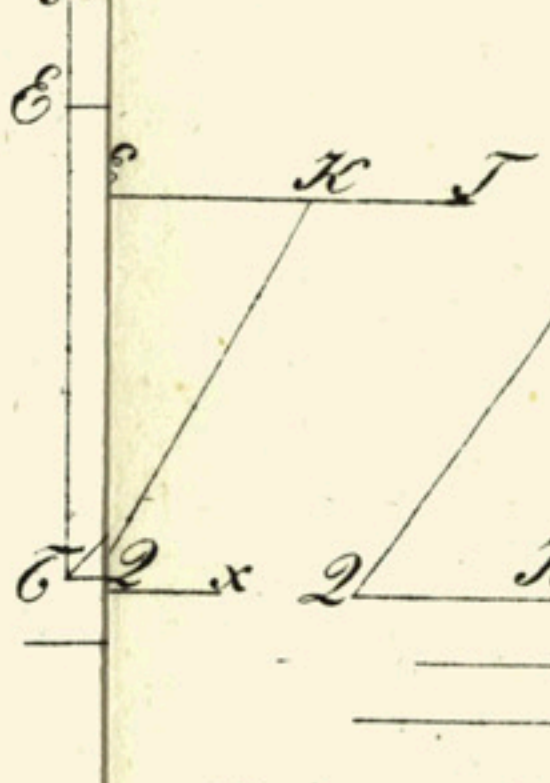


Фиг. 60.

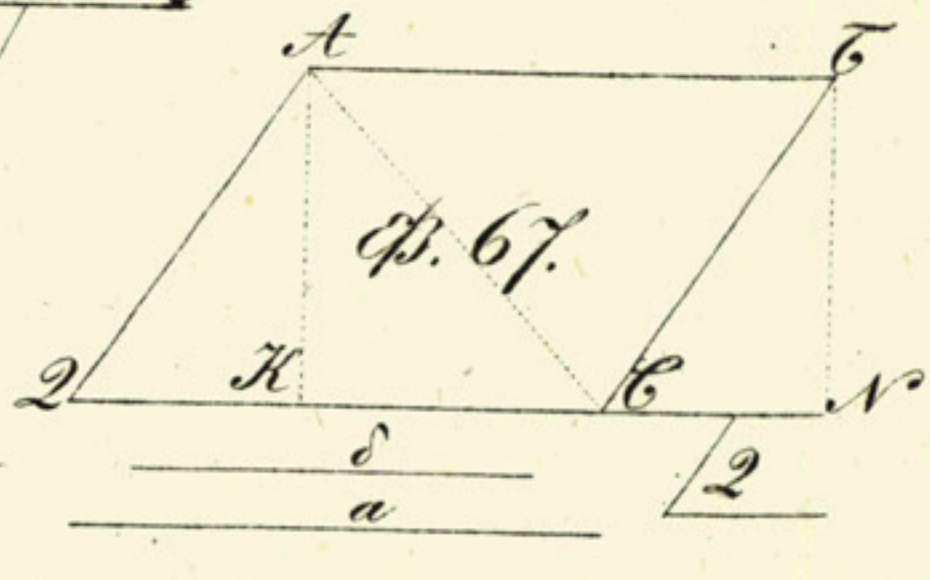


Фиг. 61.





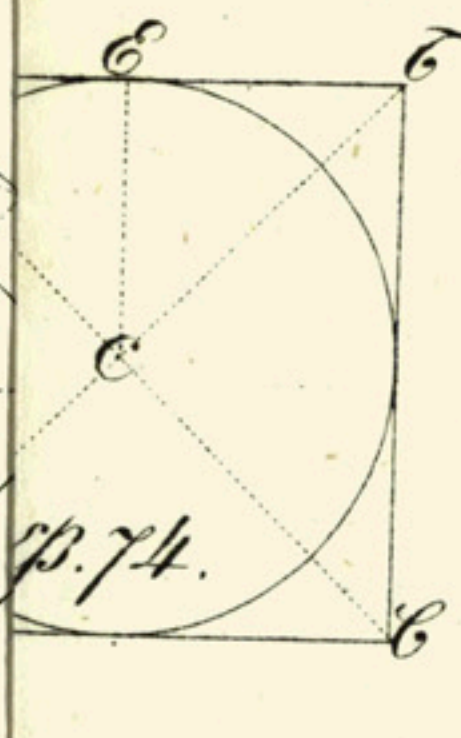
Фиг. 67.



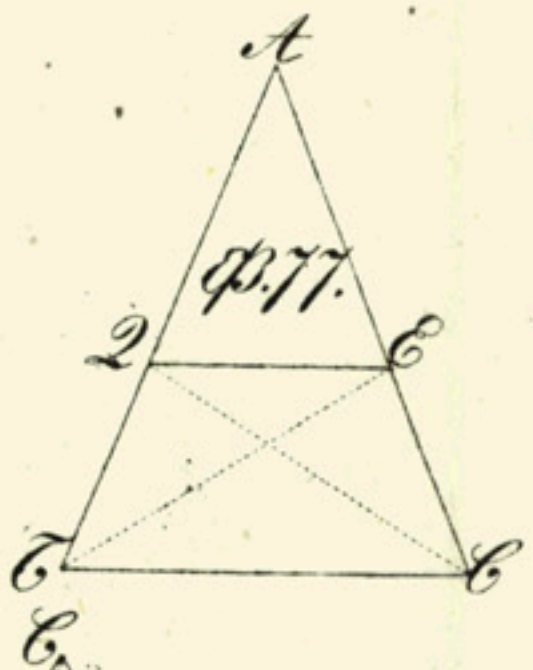
Фиг. 71.



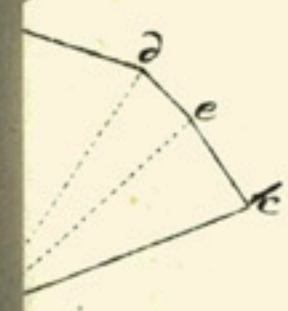
Фиг. 74.



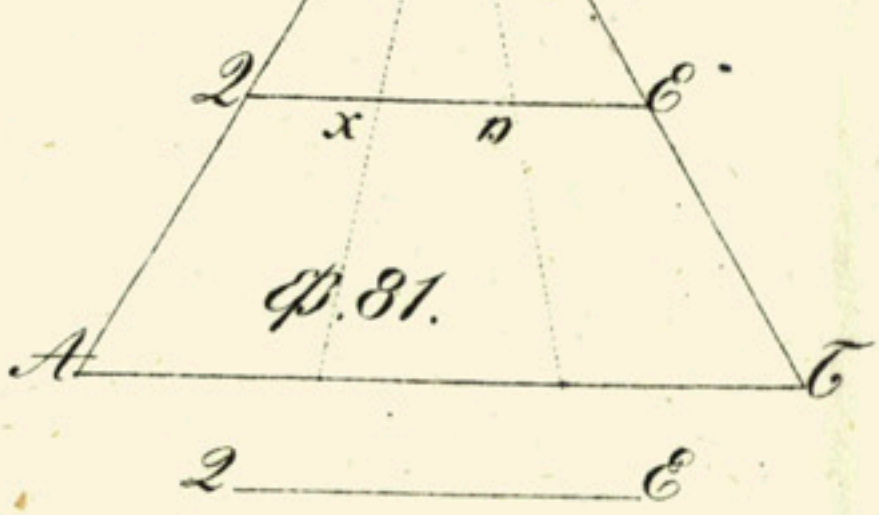
Фиг. 77.

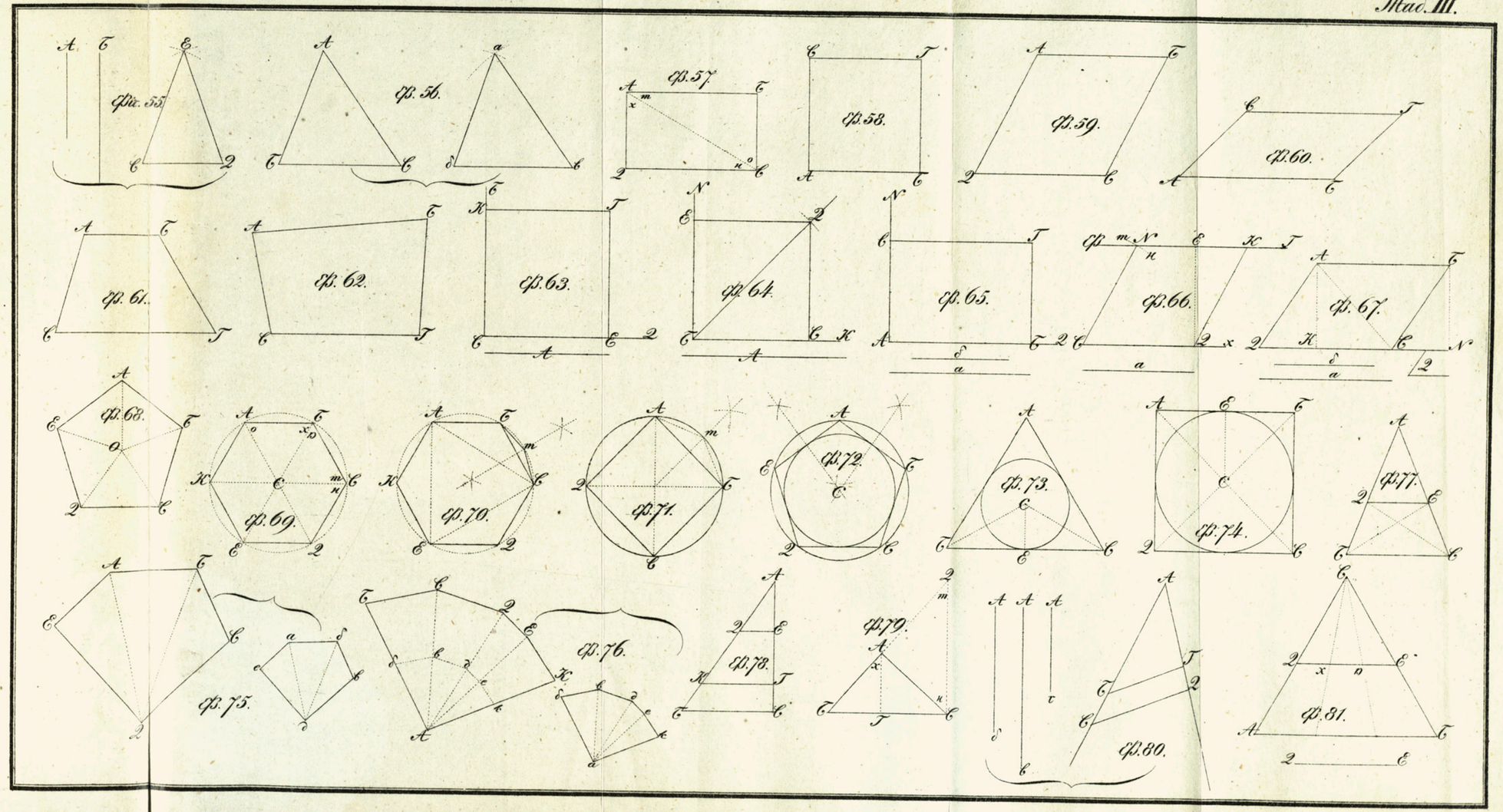


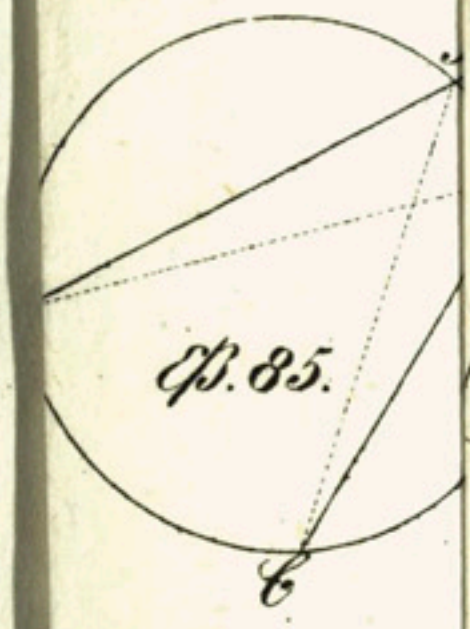
Фиг. 76.

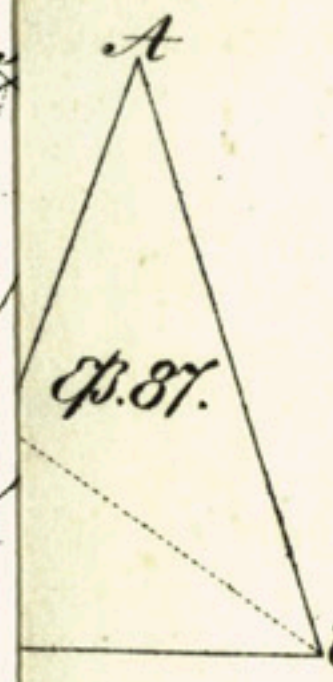


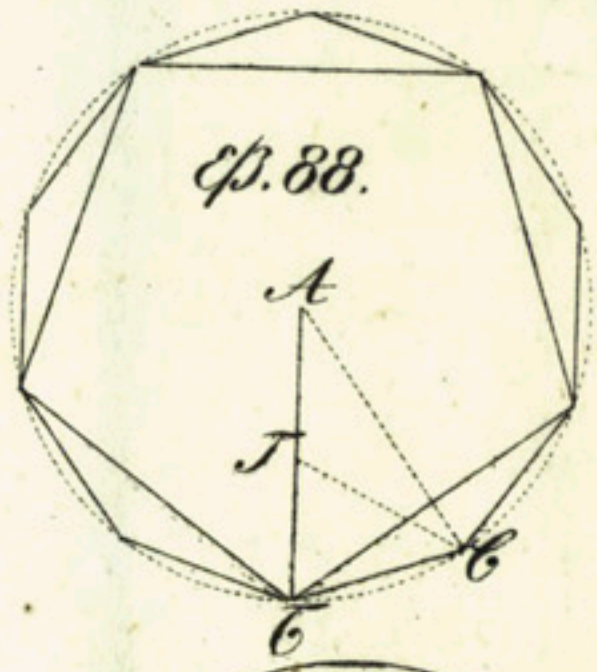
Фиг. 81.



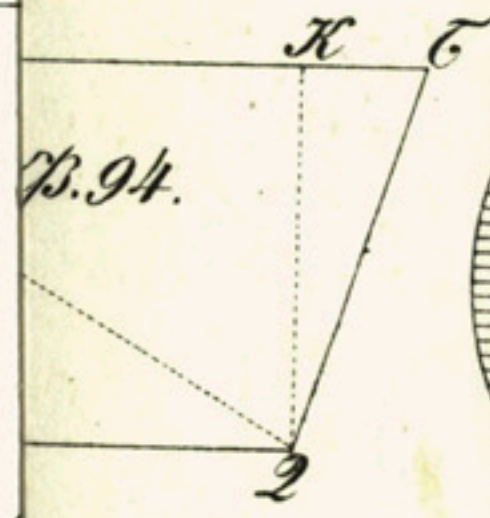

Фиг. 55.
Фиг. 56.
Фиг. 57.
Фиг. 58.
Фиг. 59.
Фиг. 60.
Фиг. 61.
Фиг. 62.
Фиг. 63.
Фиг. 64.
Фиг. 65.
Фиг. 66.
Фиг. 67.
Фиг. 68.
Фиг. 69.
Фиг. 70.
Фиг. 71.
Фиг. 72.
Фиг. 73.
Фиг. 74.
Фиг. 77.
Фиг. 75.
Фиг. 76.
Фиг. 78.
Фиг. 79.
Фиг. 80.
Фиг. 81.

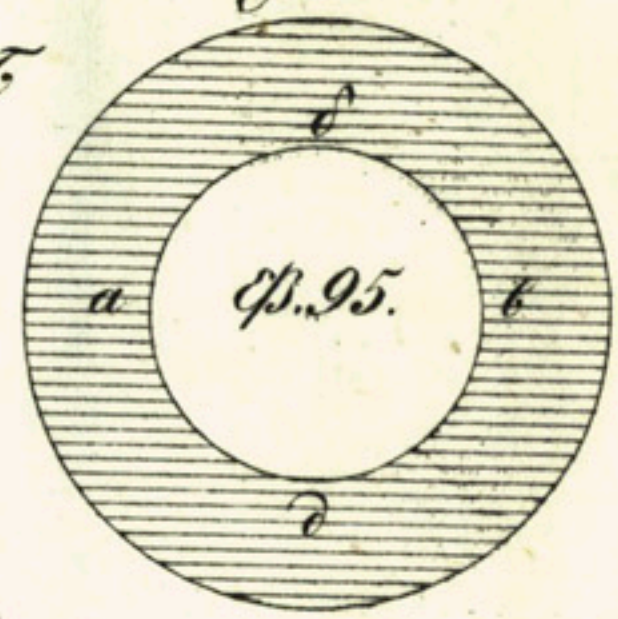

Cp. 85.
C

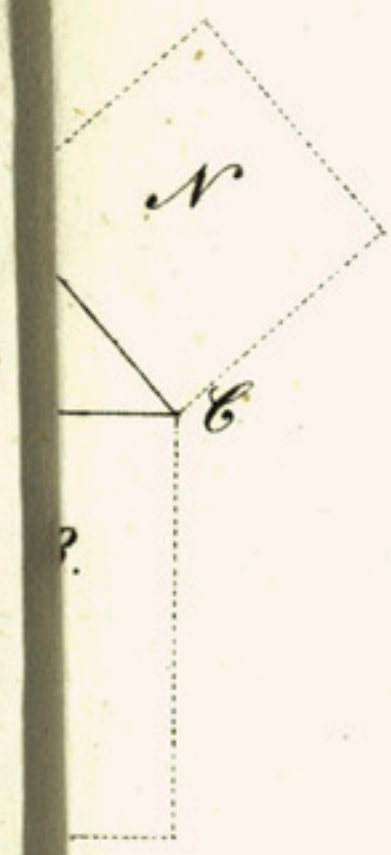

A
Cp. 87.
C

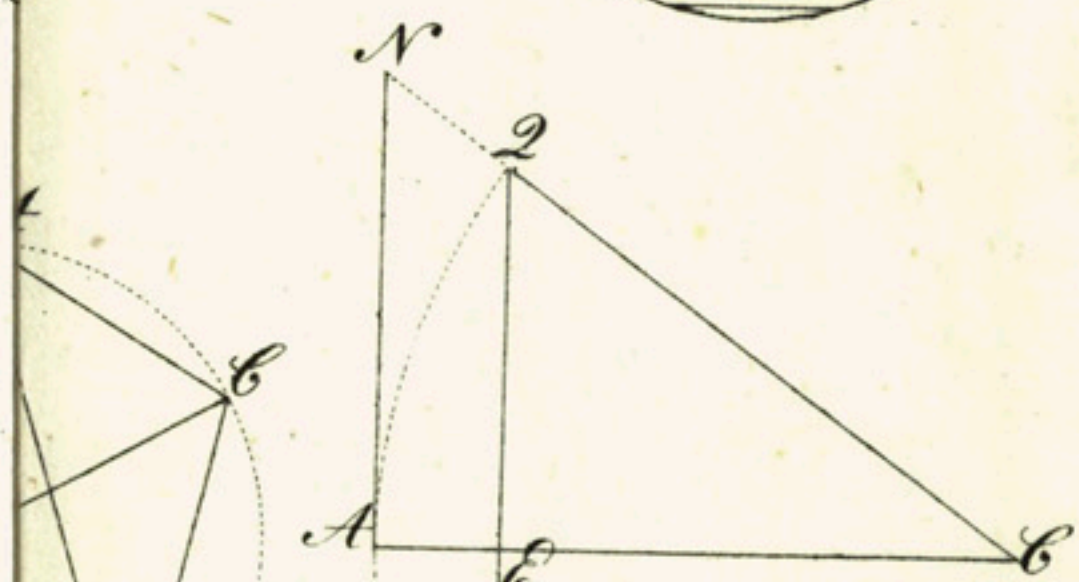

Cp. 88.
A
T
C
C


K
C

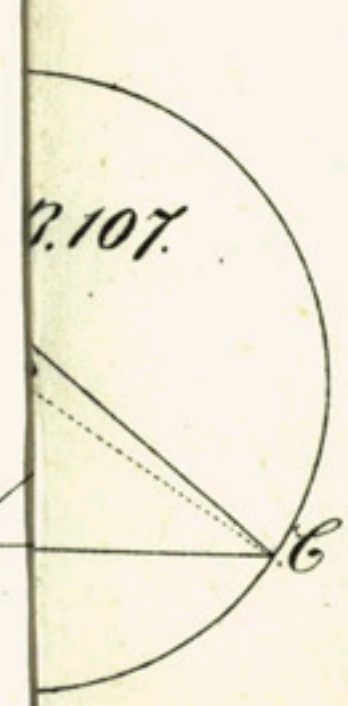

K
C
Cp. 94.
2

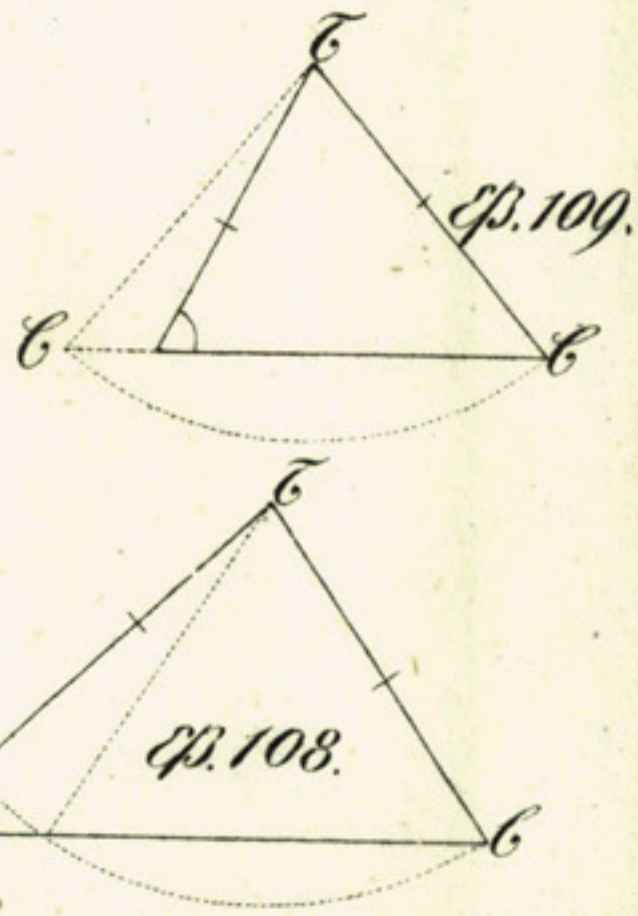

C
a
Cp. 95.
b
2


N
C

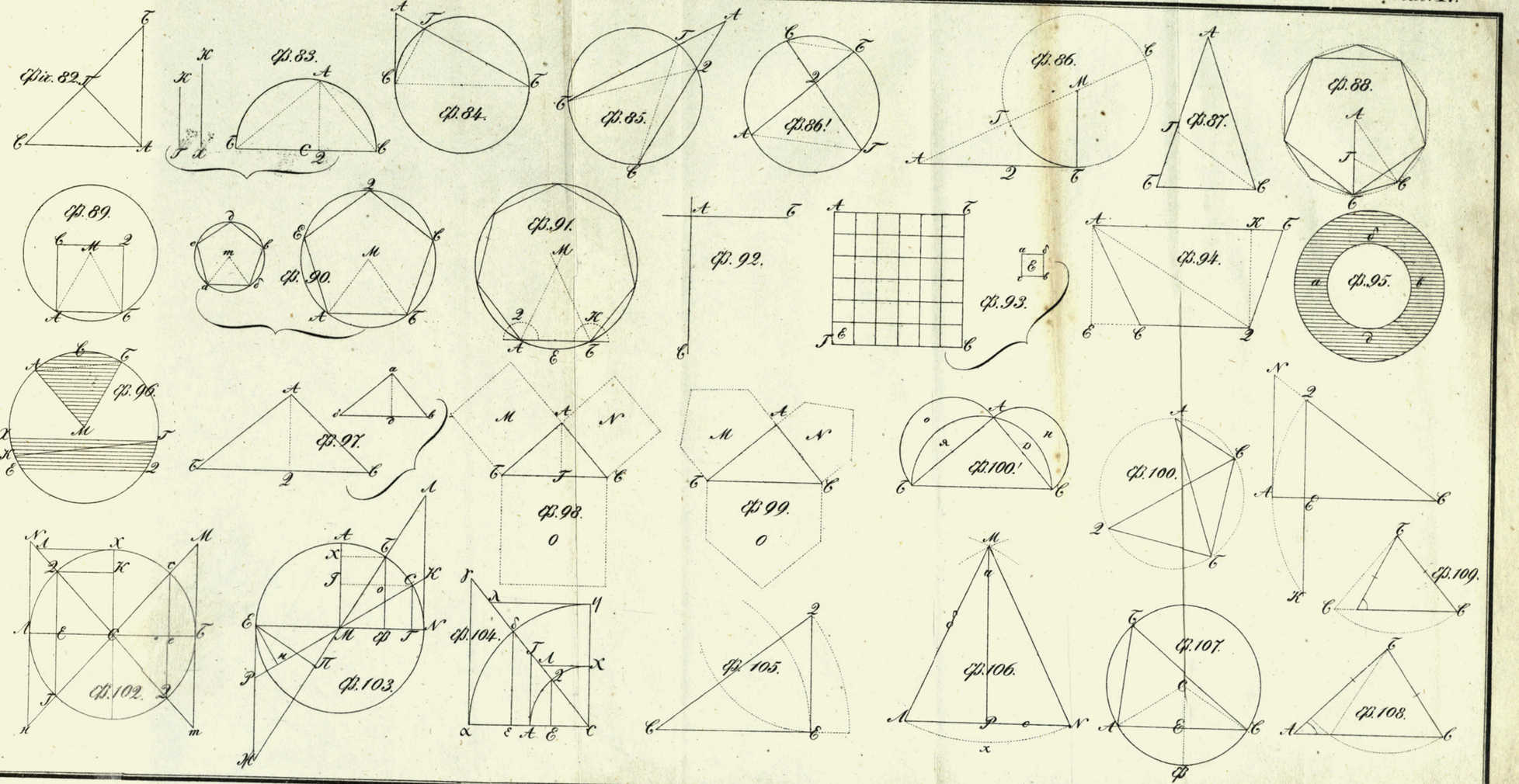

N
2
C
A
E
C
K


y
x
C


C
C
Cp. 107.


C
Cp. 109.
C
C

C
Cp. 108.
A
C


Фиг. 82.
Фиг. 83.
Фиг. 84.
Фиг. 85.
Фиг. 86.
Фиг. 86.
Фиг. 87.
Фиг. 88.
Фиг. 89.
Фиг. 90.
Фиг. 91.
Фиг. 92.
Фиг. 93.
Фиг. 94.
Фиг. 95.
Фиг. 96.
Фиг. 97.
Фиг. 98.
Фиг. 99.
Фиг. 100.
Фиг. 100.
Фиг. 102.
Фиг. 103.
Фиг. 104.
Фиг. 105.
Фиг. 106.
Фиг. 107.
Фиг. 108.
Фиг. 109.



12.

C

A

T

Фиг. 115.

Фиг. 116.

A

J

Фиг. 124

a

i

6 2

c

δ ∂

b

A

Фиг. 131.

T

Фиг. 132.

C

2

Фиг. 127.

Фиг. 130.

M T

K P

o

T

2 C E

A

Фиг. 139.

x o ∂

Π x

J N

A

T

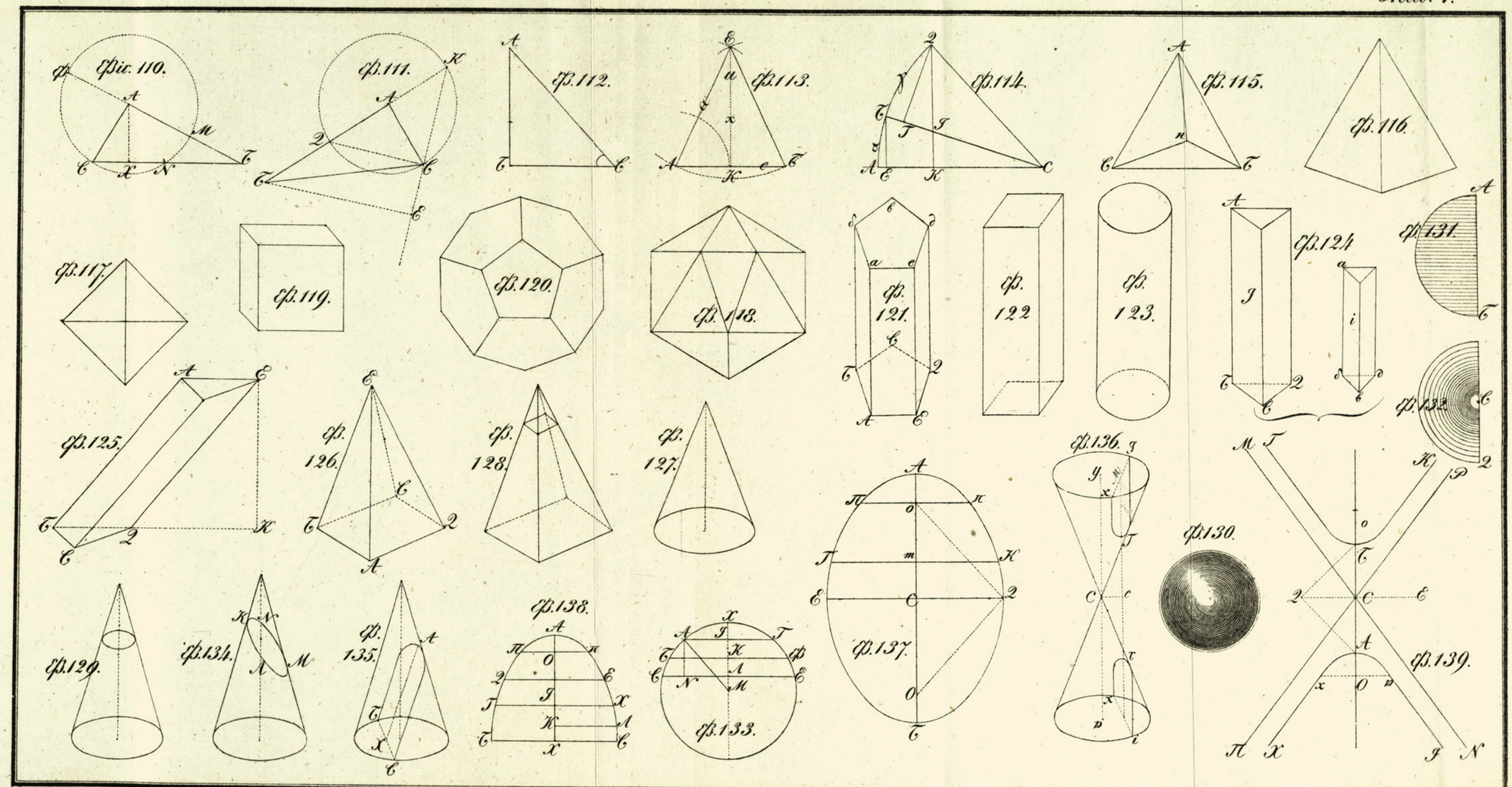
C N

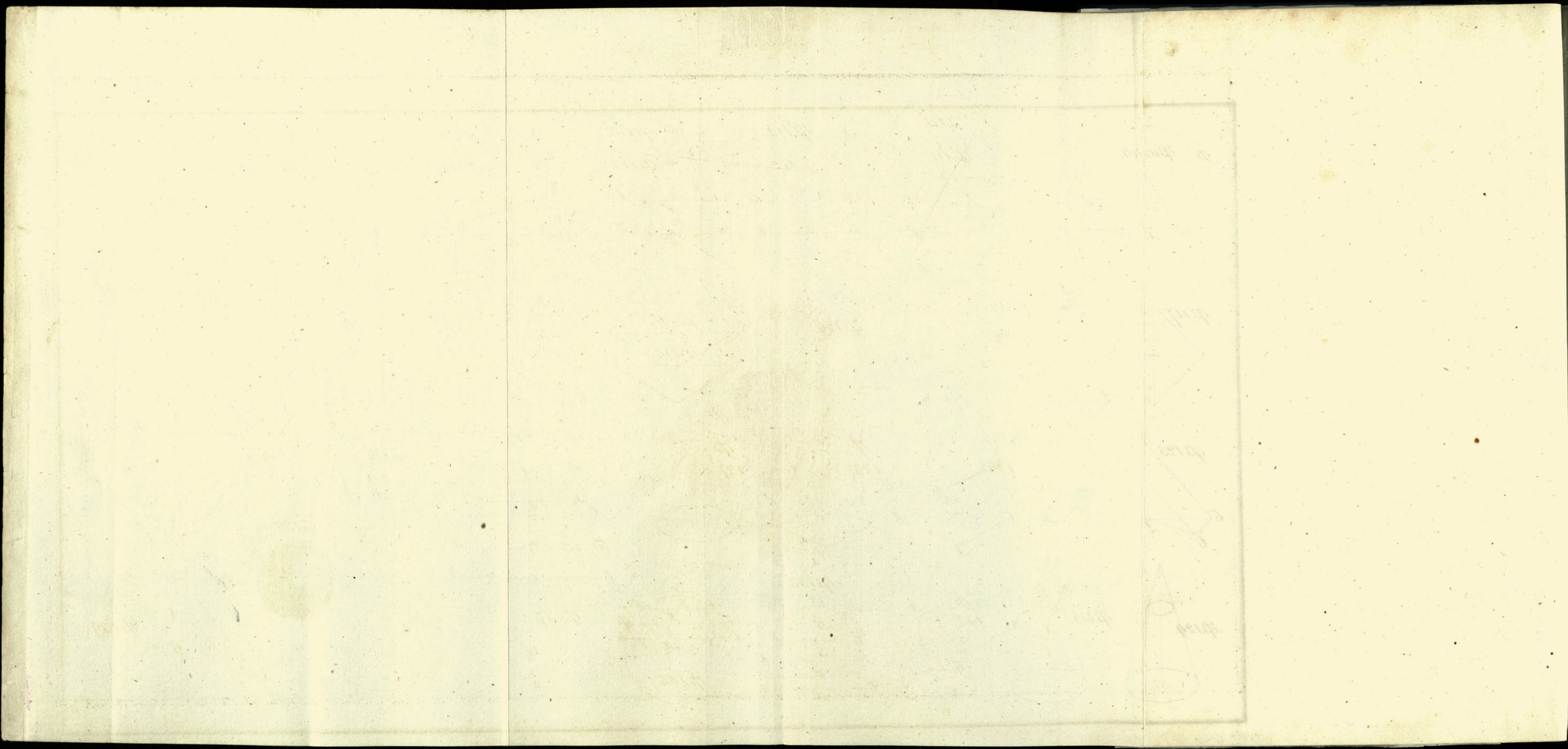
E

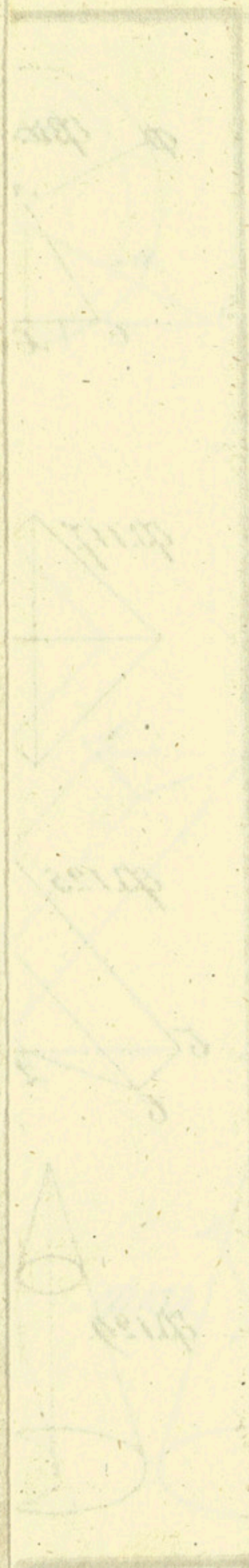
x

1

C


Фіг. 110.
Фіг. 111.
Фіг. 112.
Фіг. 113.
Фіг. 114.
Фіг. 115.
Фіг. 116.
Фіг. 117.
Фіг. 119.
Фіг. 120.
Фіг. 118.
Фіг. 121.
Фіг. 122
Фіг. 123.
Фіг. 124
Фіг. 131.
Фіг. 125.
Фіг. 126.
Фіг. 128.
Фіг. 127.
Фіг. 132.
Фіг. 136.
Фіг. 130.
Фіг. 129.
Фіг. 134.
Фіг. 135.
Фіг. 138.
Фіг. 133.
Фіг. 137.
Фіг. 139.





Rsd 1167

БИБЛИОТЕКА МАТИЦЕ СРПСКЕ

Р19 Ср III 281.1