P19 Cp III 175/2.1

Р15Ср III 175/2.1

НАЧЕЛА

ВЫШЕ МАТЕМАТИКЕ

У ТРИ ЧАСТИ.

ИЗРАДІО

ПОНАЙПРЕЧЕ ЗА ПОТРЕБУ АРТИЛЪРІЙСКЕ ШКОЛЕ К. С.,

ЕМИЛІЯНЪ ІОСИМОВИЋЪ,

при истой школи выше математике, механике и выше геодезіе професоръ, школске комисіе и дружства србске словесности редовный членъ.

У БЕОГРАДУ.

У Кньигопечатньи Княжества Србскогъ.

1860.

АКЗРАН

Strebe unermüdet stets nach Erweiterung deiner Kenntnisse, und du erstrebst damit neben eigener Befriedigung und hohem geistigen Genusse, noch das erhedende Gefühl — nützlich geworden zu sein.

E. J.

Fleiss ist mehr, als Genie, und Tausende, die sich mit diesem den Hals brechen würden, ersteigen mit jenem die Höhe glücklich die sie sich vorgesetzt haben.

Justus Möser.

5.19.17

НАЧЕЛА' ВЫШЕ МАТЕМАТИКЕ

II. ЧАСТЬ

ИНФИНИТЕЗИМАЛНЫЙ РАЧУНЪ

У ТРИ КНЬИГЕ.

Reichst mit dem Endlichen nicht mehr du aus,
Musst dann zum Unendlichen flüchten;
Doch Herr musst du ganz des Endlichen sein,
Soll auch das Unendliche endlich dir werden.

Садржай.

Књига I.

Страна

Диференціалный рачунъ . . . . . 1.

А) Диференціаленѣ функція єдногъ пременљивца . . . —

а) Понятія . . . . . —

б) Основна или главна правила диференціаленя . . 3.

в) Диференціали найглавніи функція . . . . . 5.

г) Примери . . . . . 13.

д) Выши диференціали . . . . . 23.

Примери . . . . . 30.

е) Телеровъ образацъ . . . . . 34.

ж) Маклореновъ образацъ . . . . . 43.

Б) Диференціаленѣ функція више пременљивы броєва . 50.

а) Простый диференціалъ функція више пременљивый броєва . . . . . —

б) Айлерово правило за єдностепене функціє . . . 54.

в) Выши диференціали функція више прем. броєва 57.

г) Телеровъ и Маклореновъ образацъ за ф. два пременљивца . . . . . 58.

д) Диференціаленѣ скривены функція . . . . . 65.

В) Употреблѣнѣ диференціалногъ рачуна у анализи . . 70.

а) Опредељиванѣ вредностій одъ $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$ и $\infty - \infty$. . . . . —

б) Максима и минима функція . . . . . 82.

1) Максима и минима ф. єдногъ пременљивца . . —

Примери . . . . . 86.

Задатци . . . . . 97.

2) Максима и минима ф. два пременљивца . . . 103.

Задатци . . . . . 108.

в) Опредељиванѣ абсолутны максима и минима, и граничны вредностій функція . . . . . 112.

г) Опредељиванѣ вредностій функція за безкрайну вредность пременљивца . . . . . 116.

Књига II.

Интегралный рачунъ . . . . . 119.

А) Интеграленѣ функція єдногъ пременљивца . . . . —

а) Понятія . . . . . —

б) Основна правила и образци . . . . . 122.

в) Помоћни образци . . . . . 125.

Страна

г) Интеграленѣ алгебрайски ф. целы раціоналны . . 133.
д) Интегралеиѣ алгебр. ф. деловны . . . . . —
е) „ „ „ ирраціоналны . . . . 138.
ж) Интеграленѣ израза $x^m . dx (a + bx^n)^{\frac{r}{s}}$ . . . . . 146.
Примери . . . . . 158.
з) Неколико образаца за интегране функція са
$(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}}$ . . . . . 162.
и) Интеграленѣ неки трансцендентны функція . . . 168.
1) $\int \psi(x) . l^m x . dx$ . . . . . —
2) $\int F(x) . a^x . dx$ . . . . . 171.
Примери . . . . . 172.
і) Интеграленѣ диференціалны кружны функція . . 173.
к) Интеграленѣ помоћу безкрайны редова . . . . 185.
л) Опредѣлѣни интеграли (интеграленѣ међу известнимъ границама) . . . . . 196.
Примери . . . . . 206.
м) Выши интеграли . . . . . 211.
Б) Интеграленѣ функція више пременљивы броєва . . 221.
а) Интеграли почастны диференціала . . . . . —
б) „ подпуны „ . . . . . 223.
в) „ єдностепены диференціалны функція првога реда . . . . . 229.
Примери . . . . . 230.
г) Интеграленѣ диференціалны єдначина . . . . . 231.
1) Интеграленѣ диференціалны єдначина 1. реда и по $\frac{dy}{dx}$ одъ 1. степена . . . . . 232.
α) Одлучаванѣ пременљивы броєва . . . 233.
β) Истраживанѣ интегралећегъ чинителя . . . 234.
γ) Уводенѣ новы пременљиваца . . . . . 241.
2) Интеграленѣ дифер. єдначина првога реда, по $\frac{dy}{dx}$ одъ выши степена . . . . . 245.
3) Особени разрешци диф. єдначина 1. реда . . 253.

Књига III.

Варіяціоный рачунъ . . . . . 263.
А) Развіянѣ функція одъ безкрайны редова у безкрайне редове . . . . . —
Б) Варіяціоный рачунъ . . . . . 280.
В) Найобштія теорія о максимуму и минимуму . . . 284.

КНЬИГА I.

ДИФЕРЕНЦІАЛНЫЙ РАЧУНЪ.

А. Диференціаленѣ функція єдногъ пременльивогъ броя.

а) Понятія.

§ 1.

Премена неке функціе $f(x)$ збогъ увеѣаногъ — или умалѣногъ — пременльивога броя x съ некимъ **изчезльиво** малимъ, иначе сталнимъ или пременљивимъ броемъ, зове се исте функціе **диференціалъ**, и означує се — за разлику одъ нѣне премене збогъ некогъ крайногъ прираштая броя x, кою смо у I. Ч. представляли съ $\Delta f(x)$ — предпоставлѣнимъ іой знакомъ d, т. е. символомъ $df(x)$.

Изчезльиво малый прираштай броя x притомъ, назива се **диференціалъ одъ** x, а означує съ dx, за разлику одъ каквогъ крайногъ нѣговогъ прираштая, кои смо бележили съ Δx.

Диференціалъ неке функціе дакле ніе ништа друго, по нѣна разлика одъ оне функціе, кою добыямо, ако у ньой метнемо $x+dx$ место x; у символима

$$df(x) = f(x+dx) - f(x) \quad \ldots\ldots\ldots (1.$$

Определьиванѣ ове — каошто ћемо одма видити, изчезльиво мале — разлике, зове се **диференціаленѣ** дотичне функціе $f(x)$.

§ 2.

По I. Ч. §. 11. є сасвимъ уобште

$$f(x+h) - f(x) = f_1(x)h + f_2(x)\frac{h^2}{2!} + f_3(x)\frac{h^3}{3!} + \ldots\ldots$$

Поставляюћи ту место h изчезльиво малу вредность dx, одпадаю у десной части чланови одъ другога на далѣ, као изчезльиво мали броєви выши редова, спрамъ првога члана, као изчезльиво малога првога реда (I. Ч. § 29.), и остає само да є $f(x+dx) - f(x)$, т. є.

$$df(x) = f_1(x)\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (2.$$

Изъ овога видимо:

1.) **диференціалъ є сваке функціе равanъ производу одъ нѣне прве изводне функціе са диференціаломъ променльивога броя**; пошто є пакъ овай другій чинитель изчезльиво малый брой, то є и цео производъ $f_1(x)\,dx$ такавъ брой, и тако

2.) **диференціалъ є сваке функціе изчезльиво малый брой**; найпосле

3.) **да є при диференціаленю неке функціе све само до тога стало, да се изнаће нѣна прва изводна функція, єръ имаюћи ту, имамо съ места и траженый диференціалъ, чимъ є помложимо съ dx.**

§. 3.

Изъ горнѣгъ израза подъ 2.) слѣдуе деобомъ чрезъ dx,

$$\frac{df(x)}{dx} = f_1(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.,$$

изъ чега видимо, **да є размера диференціала сваке функціе съ диференціаломъ дотичногъ променльивогъ броя** — єръ то є безъ сумнѣ лева часть овогъ израза, т. є. количникъ $\frac{df(x)}{dx}$ —, **равна првой изводной функціи исте функціе, и као такова дакле или онетъ нека функція истогъ променльивогъ броя, или пакъ некій, по томъ брою сталный брой** (I. Ч. §. 11.).

Та размера назива се просто **диференціалный количникъ**, а изъ доцніе увиђавны узрока іошъ **првый** диф. количникъ дотичне функціе, може се пакъ обзиромъ на горньій изразъ подъ 2.) назвати такођеръ и диференціалный **сачинитель**.

б.) Основна или главна правила диференціаленя.

§ 4.

1.) Ако A представля свакій уобште сталный брой, у смотреню дотичногъ пременльивогъ броя, можемо ставити

$$A = A.1 = A.x^0;$$ но тадъ имамо по § 1.

$$dA = A\,(x+dx)^0 - A.x^0 = A\,[(x+dx)^0 - x^0]$$
$$= A\,(1-1) = A.0$$
$$= 0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I.}$$

дакле є **диференціалъ свакогъ, по дотичномъ пременльивомъ брою сталнога броя, раванъ нулли.**

Изъ овога слѣдуе непосредно

2.), да **функціе едногъ истогъ пременльивогъ броя, кое се међу собомъ само некимъ сталнимъ броемъ разликую, имаю све еданъ истый диференціалъ.**

3.) Ако є за диференціаленѣ дата функція вида $A\varphi(x)$, при чему A значи као преће ма кои по x сталный брой, имамо по истомъ §.

$$dA\varphi\,(x) = A\varphi(x+dx) - A\varphi(x) = A\,[\varphi(x+dx) - \varphi(x)]$$
$$= A\,d\varphi(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II.}$$

то ће рећи: **диференціалъ производа одъ едногъ сталногъ чинителя и неке функціе, раванъ є производу одъ истогъ сталногъ чинителя съ диференціаломъ те функціе.**

4.) Ако є вопросна функція вида

$$F(x) = f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \ldots\ldots,$$ т. е.

алгебрайскій сбиръ више функція, имамо по §. 2.

$$dF(x) = F_1(x)\,dx.$$

Но по I. Ч. § 12. є прва изводна функція одъ $F(x)$,

$$F_1(x) = f_1(x) + \varphi_1(x) + \psi_1(x) + \ldots\ldots;$$ дакле, ако ово съ dx помложимо, $F_1(x)\,dx$, т. є.

$$d.\ F(x) = d\,[f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \ldots]$$
$$= f_1(x)\,dx + \varphi_1(x)\,dx + \psi_1(x)\,dx + \ldots$$
$$= df(x) + d\varphi(x) + d\psi(x) + \ldots\ldots\ldots \text{(III.,}$$

а то ће рећи: **диференціалъ алгебрайскогъ сбира одъ више функція, равanъ є алгебрайскомъ сбиру диференціала' поєдины сабирака.**

5.) Ако є пакъ вопросна функція далѣ вида

$$F(x) = f(x) \cdot \varphi(x),$$

т. є. производъ одъ две функціе, имамо, опетъ по §. 2.,

$$d\,F(x) = F_1(x)\,dx.$$

Но по истомъ пређе поменутомъ §. I. Ч. є у томъ случаю прва изводна функція

$$F_1(x) = \varphi(x) \cdot f_1(x) + f(x) \cdot \varphi_1(x);$$

дакле ако исту помножимо съ dx, быт'ће $d\,F(x)$, т. є.

$$d\,f(x)\,\varphi(x) = \varphi(x)\,f_1(x)\,dx + f(x)\,\varphi_1(x)\,dx$$
$$= \varphi(x)\,df(x) + f(x)\,d\varphi(x) \quad \ldots \text{(IV.}$$

Да се, и како се може ово докученѣ разпрострти и на више чинителя, увиђа се лако по себи; зато можемо уобште рећи: **диференціалъ производа одъ ма колико функція, равanъ є сбиру производа одъ диференціала свакогъ поєдиногъ чинителя са свима осталимъ чинительима.** Најпосле

6.) Ако є дотична функція вида

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

т. є. количникъ одъ две функціе, имамо такођеръ по §. 2.,

$$dF(x) = F_1(x)\,dx:$$

Но у истомъ пређе поменутомъ §. I. Ч. нашли смо за предпостављену функцію

$$F_1(x) = \frac{\varphi(x)\,f_1(x) - f(x)\,\varphi_1(x)}{\varphi^2(x)};$$

дакле ако помложимо съ dx, $dF(x)$, т. є.

$$d\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi(x)\,f_1(x)\,dx - f(x)\,\varphi_1(x)\,dx}{\varphi^2(x)}$$

$$= \frac{\varphi(x)\,df(x) - f(x)\,d\varphi(x)}{\varphi^2(x)} \quad \ldots\ldots \text{(V.,}$$

а то ће рећи: **диференціалъ количника две функціе, раванъ є разлици одъ производа именителя съ диференціаломъ броителя и производа броителя съ диференціаломъ именителя, — раздељеной съ квадратомъ именителя.**

Ова иста правила могли смо добыти такођеръ и изъ дотичны правила за крайне разлике функція (Ч. I. § 209.), поставляюћи у тима место $\Delta f(x)$ или $\Delta\varphi(x)$ и т. д. $df(x)$, $d\varphi(x)$, и т. д., и dx место Δx, па онда испытуюћи: шта одъ исты израза остає обзиромъ на свойства изчезльивы броева. Почетникъ ће врло добро учинити, ако то самъ покуша.

§ 5.

Съ овимъ правилама, съ изразомъ подъ 1.) у §. 1., докученћмъ 2. §., да є диференціалъ сваке функціе раванъ производу одъ нћне прве изводне функціе съ диференціаломъ пременљивога броя, и да є све до тога стало, да изнаћемо прву изводну функцію, — као найпосле іошъ и образцима у § 210. I. Ч. у станю смо изнаћи диференціалъ сваке безъ разлике функціе єдногъ пременљивогъ броя. Но да извидимо овде одма єданпутъ за свагда, колики су

в.) **Диференціали найглавніи — ређи ће найвећма употребляваюћи се — функція.**

§ 6.

1.) $f(x) = x^n$.

Ова є функц я алгебрайска; можемо дакле лако направити нћну прву изводну функцію, по § 11. Ч. I. —

Добыямо ю по тому, ако изложителя n при x съ єдномъ єдиницомъ уманьимо, и тай степенъ после съ n помложимо. Т. є. прва є изводна функція одъ x^n,

$$f_1(x) = nx^{n-1}.$$

Мложећи дакле по §. 2. ту функцію съ dx, имамо

$$dx^n = nx^{n-1}.\, dx.$$

Или: Нашли смо у § 210. I. Ч.

$$\Delta x^n = \binom{n}{1} x^{n-1}.\, \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}.\, \Delta^2 x + \binom{n}{3} x^{n-3}.\, \Delta^3 x + \ldots;$$

узимаюћи ту dx место Δx, па зато и dx^n место Δx^n: изчезаваю спрамъ првога члана сви други, као изчезљиви броєви выши редова, и остає дакле само

$$dx^n = nx^{n-1}.\, dx,$$

као пређе. — Или: По §. 1. є

$$dx^n = (x + dx)^n - x^n.$$

Ако развіємо $(x + dx)^n$ по биномномъ правилу, коє, каошто знамо, важи за свакогъ уобште изложителя, и ако после одма одузмемо x^n, быва

$$dx^n = nx^{n-1}.\, dx + \binom{n}{2} x^{n-2}.\, d^2x + \binom{n}{3} x^{n-3}.\, d^3x + \ldots\ldots,$$

или зато што спрамъ првога члана сви други, као изчезљиви броєви выши редова, изчезаваю,

$$dx^n = nx^{n-1}.\, dx$$

као пре.

Ма кои начинъ дакле употребили, налазимо свагда да є

$$\left.\begin{array}{l} dx^n = nx^{n-1}.\, dx, \text{ и уобште} \\ d\varphi^n(x) = n\varphi^{n-1}(x).\, d\varphi(x) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(I.}$$

При овой єдной функціи употребисмо више начина, при другимъ пакъ іошъ слѣдуюћимъ функціяма служит'ћемо

се понайвише само онимъ еднимъ, кои намъ се види, да є найпречій

Ако є при томе изложитель n некій разломакъ, н. п. $n = \frac{\nu}{\mu}$, имамо

$$dx^{\frac{\nu}{\mu}} = d\sqrt[\mu]{x^\nu} = \frac{\nu}{\mu} x^{\frac{\nu}{\mu}-1} \cdot dx = \frac{\nu}{\mu} x^{\frac{\nu-\mu}{\mu}} \cdot ax$$

$$= \frac{\nu}{\mu} \sqrt[\mu]{x^{\nu-\mu}} \cdot dx, \text{ уобште}$$

$$d\sqrt[\mu]{f^\nu(x)} = \frac{\nu}{\mu} \sqrt[\mu]{f^{\nu-\mu}(x)} \cdot df(x) \quad \Big\} \ldots\ldots\ldots \text{(I'.}$$

Дакле у случаю ако є $\frac{\nu}{\mu} = \frac{1}{2}$, кои є врло обичанъ,

уобште

$$d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \qquad d\sqrt{f(x)} = \frac{df(x)}{2\sqrt{f(x)}} \Big\} \ldots\ldots \text{(II''}$$

§ 7.

2.) $f(x) = a^x$.

По 2. §. диференціалъ сваке функціє, па дакле и ове, раванъ є производу одъ нѣне прве изводне функціє съ dx; прва є пакъ изводна функція одъ a^x, по I. Ч. § 161., $a^x la$; слѣдователно

$$da^x = a^x la \cdot dx.$$

Или: По § 210. I. Ч.

$$\Delta a^x = a^x \left(la\Delta x + \frac{l^2 a}{2!} \Delta^2 x + \frac{l^3 a}{3!} \Delta^3 x + \ldots\ldots\right).$$

Дакле ако место Δx узмемо dx,

$$da^x = a^x la \cdot dx,$$

єръ остали чланови спрамъ првога изчезаваю.

Ма како радили, стои

$$\left.\begin{aligned} da^x &= a^x la \,.\, dx, \quad \text{а уобште} \\ da^{\varphi(x)} &= a^{\varphi(x)} la \,.\, d\varphi(x) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(II.}$$

У случаю да є $a = e$, т. є. основица природны логаритама, быва због $le = 1$,

$$\left.\begin{aligned} de^x &= e^x dx, \quad \text{уобште} \\ de^{\varphi(x)} &= e^{\varphi(x)} \,.\, d\varphi(x) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(II'.}$$

3.) $f(x) = log\ x.$

По истомъ пређе поменутомъ §. I. Ч. имамо

$$\Delta\, log\, x = M\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta^2 x}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\Delta^3 x}{x^3} - \ldots\right);$$

дакле ако место Δx узмемо dx, мора быти

$$\left.\begin{aligned} d\ log\, x &= M\ \frac{dx}{x}, \quad \text{уобште} \\ d\ log\, \varphi(x) &= M\ \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(III.}$$

За природне логаритме пакъ, при коима є $M = 1$, быт'ће

$$\left.\begin{aligned} dlx &= \frac{dx}{x}, \quad \text{уобште} \\ dl\varphi(x) &= \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(III'.}$$

Изъ овогъ последнћта израза слћдує

$$d\varphi(x) = \varphi(x)\,.\,dl\varphi(x) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III''}$$

врло употребителанъ образацъ за диференціаленћ оны функція', коє се логаритмійски могу разправити. По томъ образцу имали бы н. п.

$$d\ [\varphi(x)]^{\psi(x)} = [\varphi(x)]^{\psi(x)} \cdot d\,l\,[\varphi(x)]^{\psi(x)} = [\varphi(x)]^{\psi(x)} \cdot$$

$$d\ [\psi(x) \cdot l\varphi(x)]$$

$$= [\varphi(x)]^{\psi(x)} \cdot [l\varphi(x) \cdot d\psi(x) +$$

$$+ \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\, d\varphi(x)] \ldots\ldots \text{(III'''.}$$

§ 8.

4.) $f(x) = \sin x.$

По већъ вишепута поменутомъ §. I. Ч. имамо

$$\Delta \sin x = \cos x \,.\, \Delta x - \frac{1}{2!} \sin x \,.\, \Delta^2 x - \frac{1}{3!} \cos x \,.\, \Delta^3 x + \ldots,$$

дакле ако место Δx метнемо dx,

$$\left.\begin{array}{ll} d \sin x = \cos x \cdot dx, & \text{уобште} \\ d \sin \varphi(x) = \cos \varphi(x) \cdot d\varphi(x) & \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(IV.}$$

На истый начинъ добыямо

5.) збогъ

$$\Delta \cos x = -\sin x \,.\, \Delta x - \frac{1}{2!} \cos x \,.\, \Delta^2 x + \frac{1}{3!} \sin x \,.\, \Delta^3 x + \ldots.,$$

$$\left.\begin{array}{ll} d \cos x = -\sin x\, dx, & \text{уобште} \\ d \cos \varphi(x) = -\sin \varphi(x)\, d\varphi(x) & \end{array}\right\}^{*)} \ldots\ldots \text{(V.}$$

---

*) Помоћу § 1. имали бы

$$\begin{aligned} \mathrm{d\ sin\ x} &= \mathrm{sin\ (x+dx) - sin\ x} \\ &= \mathrm{sin\ x \cdot cos\ dx + cos\ x \cdot sin\ dx - sin\ x}, \\ \mathrm{d\ cos\ x} &= \mathrm{cos\ (x+dx) - cos\ x} \\ &= \mathrm{cos\ x \cdot cos\ dx - sin\ x \cdot sin\ dx - cos\ x}, \end{aligned}$$

или обзиромъ на то, да се cos врло малогъ лука одъ полупречника 1, а sin таквога лука одъ нулле неразликуе,

$$\begin{aligned} \mathrm{d\ sin\ x} &= \mathrm{sin\ x + cos\ x\ dx - sin\ x = cos\ x\ dx} \\ \mathrm{d\ cos\ x} &= \mathrm{cos\ x - sin\ x\ dx - cos\ x = -\ sin\ x\ dx}, \end{aligned}$$

каошто е нађено прећашньимъ начиномъ.

§ 9.

По 5. правилу у §. 4. имамо употреблѣнѣмъ докученя подъ IV. и V.,

6.) збогъ $tang\ x = \frac{sin\ x}{cos\ x}$:

$$d\ tang\ x = \frac{cos\ x\ .\ d\ sin\ x - sin\ x\ .\ d\ cos\ x}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x}\ dx$$

$$= \frac{dx}{cos^2 x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VI.;}$$

7.) збогъ $cot\ x = \frac{cos\ x}{sin\ x}$:

$$d\ cot\ x = \frac{sin\ x\ .\ d\ cos\ x - cos\ x\ .\ d\ sin\ x}{sin^2 x} = -\ \frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x}\ dx$$

$$= -\ \frac{dx}{sin^2 x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VII.;}$$

8.) збогъ $sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$:

$$\left.\begin{aligned} d\ sec\ x &= -\ \frac{d\ cos\ x}{cos^2 x} = \frac{sin\ x}{cos^2 x}\ dx \\ &= sec\ x\ .\ tang\ x\ .\ dx \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(VIII.,}$$

9.) збогъ $cosec\ x = \frac{1}{sin\ x}$:

$$\left.\begin{aligned} d\ cosec\ x &= -\ \frac{d\ sin\ x}{sin^2 x} = -\ \frac{cos\ x}{sin^2 x}\ dx \\ &= -\ cosec\ x\ .\ cot\ x\ .\ dx \end{aligned}\right\} \ldots \text{(IX.}$$

§ 10.

10.) $f\ (x) = sin\ v\ .\ x.$

Изъ тригонометріе (§ 4.) знамо, да є

$$sin\ v\ .\ x = 1 - cos\ x;$$

дакле по §. 4. (правило III. и I.), а обзиромъ на § 8. мора быти

$$d\ sin\ v\,.\,x = -\ d\ cos\ x = sin\ x\,.\,dx \quad \ldots\ldots \text{(X.}$$

Сасвимъ истимъ начиномъ налазимо

11.) збогъ $cos\ v\,.\,x = 1 - sin\ x$,

$$d\ cos\ v\,.\,x = -\ d\ sin\ x = -\ cos\ x\,.\,dx \quad \ldots\ldots \text{(XI.}$$

§ 11.

12.) Ставимо $x = sin\ z$; быт'ће по образцу IV., § 8.,

$dx = cos\ z\,.\,dz$, и одатле

$$dz = \frac{dx}{cos\ z} = \frac{dx}{\sqrt{1-sin^2 z}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Но z по предпостављњу није ништа друго, но лукъ, коега є sin раванъ x, т. є. $z = arc\ (sin = x)$; ако дакле место z узмемо овай изразъ, стои

$$d\ arc\ (sin = x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \ldots\ldots \text{(XII.}$$

13.) Ако є $x = cos\ z$, имамо по образцу V., §. 8.,

$dx = -\ sin\ z\,.\,dz$, и одатле

$$dz = -\frac{dx}{sin\ z} = -\frac{dx}{\sqrt{1-cos^2 z}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ т. є.}$$

$$d\ arc\ (cos = x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \ldots\ldots \text{(XIII.}$$

14.) За $x = tang\ z$ быва по обр. VI., §. 9.,

$$dx = d\ tang\ z = \frac{dz}{cos^2 z},$$

и одатле

$$dz = cos^2 z\,.\,dx = \frac{dx}{sec^2 z} = \frac{dx}{1+tang^2 z} = \frac{dx}{1+x^2},$$

то ће рећи

$$d\ arc\ (tang = x) = \frac{dx}{1+x^2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(XIV.}$$

15.) За $x = cot\, z$ слѣдує по обр. VII., §. 9.,

$$dx = -\frac{dz}{sin^2 z},$$

и одтуда

$$dz = -\, sin^2 z \,.\, dx = -\frac{dx}{cosec^2 z} = -\frac{dx}{1 + cot^2 x} = -\frac{dx}{1+x^2},$$

т. є.

$$d\, arc\,(cot = x) = -\frac{dx}{1+x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XV.}$$

16.) За $x = sec\, z$, по обр. VIII., §. 9.,

$$dx = sec\, z \,.\, tang\, z \,.\, dz,$$

и одатле

$$dz = \frac{dx}{sec\, z \,.\, tang\, z} = \frac{dx}{sec\, z \sqrt{sec^2 z - 1}} = \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}, \text{ т. є.}$$

$$d\, arc\,(sec = x) = \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(XVI.}$$

17.) За $x = cosec\, z$, по обр. IX. (§. 9.),

$$dx = -\, cosec\, z \,.\, cot\, z \,.\, dz,$$

и одтудъ

$$dz = -\frac{dx}{cosec\, z \,.\, cot\, z} = -\frac{dx}{cosec\, z \sqrt{cosec^2 z - 1}} = -\frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}},$$

т. є.

$$d\, arc\,(cosec = x) = -\frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} \quad \ldots\ldots \text{(XVII.}$$

18.) За $x = sin\, v \,.\, z$, по обр. X., §. 10.,

$$dx = sin \,.\, z \; dz;$$

одатле пакъ

$$dz = \frac{dx}{sin\, z} = \frac{dx}{\sqrt{1 - cos^2 z}} = \frac{dx}{\sqrt{(1 - cos\, z)(1 + cos\, z)}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{sin v \,.\, z\,[1 + (1 - sin v \,.\, z)]}} = \frac{dx}{\sqrt{sin\, v \,.\, z\,(2 - sin v \,.\, z)}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{x\,(2 - x)}} = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}},$$

т. є.

$$d\, arc\,(sin\, v \,. = x) = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(XVIII.}$$

Найпосле

19.) За $x = cos\, v \,.\, z$, на сасвимъ истый начинъ, а помоћу обр. XI. (§. 10.),

$$d\, arc\, (cos\, v \,.= x) = -\frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{XIX.}$$

Врло добро урадит'ћемо безъ сумнѣ, ако узмемо одма за упражнѣнѣ и неколико

г.) Примера.

§ 12.

1.) Чему є равань

$$d\left(2x^3 - \frac{a}{x^2} + x\sqrt[3]{2x^2} + \frac{x}{lx}\right)^{\frac{2}{3}} = dX^{\frac{2}{3}}\,?$$

Найпре имамо по образцу I. (или I'.) § 6.

$$dX^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} X^{-\frac{1}{3}}\, dX = \frac{2}{3} \cdot \frac{dX}{\sqrt[3]{X}}\,;$$

употребљнѣмъ правила III. §. 4., вопросный дифференціалъ далѣ

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{X}} \cdot \left(d\, 2x^3 - d\, \frac{a}{x^2} + d\, x\sqrt[3]{2x^2} + d\, \frac{x}{lx}\right);$$

употребљнѣмъ правила II. §. 4. и обр. I. §. 6. на $d\, 2\, x^3$, — правила V. §. 4. и обр. I. §. 6. съ обзиромъ на правило II. §. 4. на $d\, \frac{a}{x^2}$, — правила IV. §. 4. и обр. I'. §. 6. съ обзиромъ на правило II. §. 4. на $d\, x\sqrt[3]{2x^2}$, — најпосле правила V. §. 4. и обр. III'. §. 7. на $d\, \frac{x}{lx}$: вопросный дифференціалъ далѣ

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{X}} \cdot \left(6x^2 + \frac{2a}{x^3} + \sqrt[3]{2x^2} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{2x^2} + \frac{lx - 1}{l^2 x}\right) dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{X}} \cdot \left(6x^2 + \frac{2a}{x^3} + \frac{5}{3}\sqrt[3]{2x^2} + \frac{1}{lx^2} \cdot l\frac{x}{e}\right) dx ;$$

дакле коначно

$$d\left(2x^3 - \frac{a}{x^2} + x\sqrt[3]{2x^2} + \frac{x}{lx}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{18x^5 . l^2 x + 6a\, l^2 x + 5x^3 l^2 x \sqrt[3]{2x^2} + 3x^3 l\frac{x}{e}}{\left(2x^3 - \frac{a}{x^2} + x\sqrt[3]{2x^2} + \frac{x}{lx}\right)^{\frac{1}{3}}} dx.$$

§ 13.

2.) $d\,\frac{a^x - a^{\sin x}}{a^x + a^{\sin x}} = dX = ?$

По правилу V. у §. 4.

$$dX = \frac{(a^x + a^{\sin x}) . d(a^x - a^{\sin x}) - (a^x - a^{\sin x}) . d(a^x + a^{\sin x})}{(a^x + a^{\sin x})^2};$$

по правилу III. §. 4., обр. II. §. 7. и IV. §. 8., истый диференціалъ далѣ

$$= \frac{(a^x + a^{\sin x}) . (a^x la\, dx - a^{\sin x} la \cos x . dx - (a^x - a^{\sin x})(a^x la\, dx + a^{\sin} la \cos x . dx)}{(a^x + a^{\sin x})^2}$$

$$= \frac{2 la . a^{x + \sin x} . (1 - \cos x)}{(a^x + a^{\sin x})^2} \cdot dx ;$$

найпосле ако место $(1 - \cos x)$ узмемо (по тригонометріе § 29.) $2\sin^2\frac{x}{2}$, вопросный диференціалъ, т. е.

$$d\,\frac{a^x - a^{\sin x}}{a^x + a^{\sin x}} = \frac{4la . \sin^2\frac{x}{2} . a^{x + \sin x}}{(a^x + a^{\sin x})^2} \cdot dx .$$

3.) $d\,(l\,sin\,v\,.\,x \rightharpoonup a^{\cos x})^{x^2} = d\,X^{x^2} = ?$

По §. 7. обр. III.″ ,

$$d\,X^{x^2} = X^{x^2}.\,.\left(l\,X\,.\,dx^2 + \frac{x^2}{X}\,d\,X\right)$$

$$= X^{x^2-1}.\,(2x\,X\,l\,X\,dx + x^2 d\,X),$$

далѣ после

$$= X^{x^2-1}\,.\left[2x\,X\,l\,X\,dx + x^2\left(\frac{d\,sin\,v\,.\,x}{sin\,v\,.\,x} + a^{\cos x}\,.\,la\,sin\,x\,dx\right)\right]$$

(обр. III′. §. 7., обр. II. §. 7. и обр. V. §. 8.) ,

$$= X^{x^2-1}\,.\left[2x\,X\,l\,X\,dx + x^2\left(\frac{sin\;x}{sin\,v\,.\,x} + a^{\cos x}\,.\,la\,sin\,x\right)dx\right]$$

(обр. X. §. 10.) ,

$$= \frac{X^{x^2-1}}{sin\,v\,.\,x}\,.\,[2x\,X\,l\,X\,.\,sin\,v\,.\,x + x^2(sin\,x + a^{\cos x}\,.\,la\,sin\,x\,sin\,v\,.\,x)]\,dx'$$

при чему место X валя узети $l\,sin\,v\,.\,x \rightharpoonup a^{\cos x}$.

§ 14.

4.) $d\,l\,(1 \pm x) = \frac{d\,(1 \pm x)}{1 \pm x} = \pm\frac{dx}{1 \pm x}$

(обр. III′. §. 7. и правило III. §. 4.)

5.) $d\,l\,(1 \pm x^2) = \frac{d\,(1 \pm x^2)}{1 \pm x^2} = \pm\frac{2x\,dx}{1 \pm x^2}$

(прећ. обр. и правило, и осимъ тога іошъ I. обр. §. 6.)

6.) $d\,l\,(x \pm \sqrt{1+x^2}) = \frac{d\,(x \pm \sqrt{1+x^2})}{x \pm \sqrt{1+x^2}} = \frac{1 \pm \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x \pm \sqrt{1+x^2}}\,.\,dx$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} \pm x}{x \pm \sqrt{1+x^2}}\,.\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{\pm\,(x \pm \sqrt{1+x^2})}{x \pm \sqrt{1+x^2}}\,.\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \pm\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

(обр. III′. §. 7., правило III. §. 4. и обр. I″. §. 6.)

7.) $$\frac{d\,l\,(x \pm \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{d\,(x \pm \sqrt{x^2-1})}{x \pm \sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1 \pm \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{-1}\,.\,(x \pm \sqrt{x^2-1})} \cdot dx$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1} \pm x}{x \pm \sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{-1}\,.\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{\pm\,(x \pm \sqrt{x^2-1})}{x \pm \sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \pm \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(осимъ пређашньи образаца и правила іошъ прав. II. §. 4.).

Сравни овай диференціалъ съ $d\ arc\ (sin = x)$ **и** $d\ arc\ (cos = x)$ **у §. 11. подъ XII. и XIII.**

8.) $$d\,\frac{l\,(\sqrt{1-x^2} \pm x\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}} = \frac{d\,(\sqrt{1-x^2} \pm x\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}\,.\,(\sqrt{1-x^2} \pm x\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\,.\,(\sqrt{1-x^2} \pm x\sqrt{-1})} \cdot dx$$

$$= \frac{-x \mp \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1} \mp x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{x \mp \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1} \mp x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{\mp\,(\sqrt{x^2-1} \mp x)}{\sqrt{x^2-1} \mp x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \pm \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(исти обр. и правила као пре).

9. $$d\,\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot l\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,d\left[l(1+x\sqrt{-1})-l(1-x\sqrt{-1})\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\left[\frac{d(1+x\sqrt{-1})}{1+x\sqrt{-1}}-\frac{d(1-x\sqrt{-1})}{1-x\sqrt{-1}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{-1}}{1+x\sqrt{-1}}+\frac{\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+x\sqrt{-1}}+\frac{1}{1-x\sqrt{-1}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+x^2}\,dx=\frac{dx}{1+x^2}$$

(образци II. и III. § 4., и обр. III′. § 7).

Сравни овай диференціалъ съ $d\,arc\,(tang=x)$ у § 11. подъ XIV.

10.) $$d\,l\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}+x}=d\left[l\,(\sqrt{1-x^2}-x)-l\,(\sqrt{1-x^2}+x)\right]$$

$$=\frac{d\,(\sqrt{1-x^2}-x)}{\sqrt{1-x^2}-x}-\frac{d\,(\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}+x}$$

$$=\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}-1}{\sqrt{1-x^2}-x}\,dx-\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+1}{\sqrt{1-x^2}+1}\,dx$$

$$=\left(\frac{-x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}-x}-\frac{-x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+x}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\left[-\frac{(x+\sqrt{1-x^2})^2+(-x+\sqrt{1-x^2})^2}{(\sqrt{1-x^2}-x).(\sqrt{1-x^2}+x)}\right].\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{2\,dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

11.) $d \cdot \frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} d \left[l(1+x) - l(1-x) \right]$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} \right) dx = \frac{dx}{1-x^2}$$

(прав. III. § 4. и обр. III′. § 7.)

§ 15.

12.) $d \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} d \left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} \right)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(e^{x\sqrt{-1}} . dx\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}} . dx\sqrt{-1} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(e^{x\sqrt{-1}} . \sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}} . \sqrt{-1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} \right) dx$$

(прав. II. и III. § 4., и обр. II′. § 7.)

На истый начинъ добыямо

13.) $d \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^{x\sqrt{-1}} . dx\sqrt{-1} - e^{-x\sqrt{-1}} . dx\sqrt{-1} \right)$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2} \left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} \right) dx = \frac{-1}{2\sqrt{-1}} \left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} \right) dx$$

$$= - \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} . dx$$

Сравни ова два диференціала међу собомъ, и са $d \sin x$ и $d \cos x$ у § 8., съ обзиромъ на то, шта є првый из-разъ $\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$, а шта другій $\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$?

(I. Ч. § 163.)

§ 16.

14.) $d\, llx = \frac{d\, lx}{lx} = \frac{dx}{x\, lx}$ (обр. III′. § 7.)

15.) $d\ l\ tang\ x = \frac{d\ tang\ x}{tang\ x} = \frac{dx}{tang\ x\ cos^2 x} = \frac{dx}{sin\ x\ cos\ x}$

$= \frac{2\ dx}{sin\ 2x}$

(обр. III′. § 7. и тригоном. §§ 15. и 26.).

16.) $d\ sin\ lx = cos\ lx\ .\ d\ lx = cos\ lx \cdot \frac{dx}{x} = \frac{cos\ lx}{x} \cdot dx$

(обр. IV. § 8. и III′. § 7.).

17.) $d\ cos\ a^x = -\ sin\ a^x .\ da^x = -\ sin\ a^x .\ a^x la\ dx$

$= -\ la\ .\ a^x sin\ a^x .\ dx$ (обр. V. § 8. и II. § 7.)

18.) $de^{sin\ x} = e^{sin\ x} .\ d\ sin\ x = e^{sin\ x} .\ cos\ x\ dx$ (обр. II′. § 7. и IV. § 8.).

19.) $da^{lx} = a^{lx} .\ la\ .\ dlx = a^{lx}\ la \cdot \frac{dx}{x} = \frac{a^{lx} la}{x} \cdot dx$

(обр. II. и III′. § 7.).

20.) $de^{sin\ a^{lx}} = e^{sin\ a^{lx}} .\ d\ sin\ a^{lx}$ (обр. II′. § 7.),

притомъ $d\ sin\ a^{lx} = cos\ a^{lx} .\ da^{lx}$ (обр. IV. § 8.),

притомъ $da^{lx} = a^{lx} la\ dlx$ (обр. II. § 7.),

притомъ $dlx = \frac{dx}{x}$ (обр. III′. § 7.);

дакле ако надлежно заменемо, вопросный

$$de^{sin\ a^{lx}} = e^{sin\ a^{lx}} .\ cos\ a^{lx} .\ a^{lx} la\ .\ \frac{dx}{x}$$

21.) $d\ cos\ a^{l\ sin\ a^x} = -\ sin\ a^{l\ sin\ a^x} .\ da^{l\ sin\ a^x}$ (обр. V. § 8.),

притомъ $da^{l\ sin\ a^x} = a^{l\ sin\ a^x} .\ la\ .\ dl\ sin\ a^x$ (обр. II. § 7.),

притомъ $dl\ sin\ a^x = \frac{d\ sin\ a^x}{sin\ a^x}$ (обр. III′. § 7.),

$= \frac{cos\ a^x}{sin\ a^x} \cdot da^x$ (об. IV. § 8.);

$= cot\ a^x .\ da^x$,

притомъ $da^x = a^x la\ dx$ (обр. II. § 7.);

дакле ако надлежно заменемо, вопросный

$$d\cos a^{l\sin a^x} = -\sin a^{l\sin a^x}.\ a^{l\sin a^x}.\ la\ .\ \cot a^x.\ a^x la\ .\ dx$$

$$= -la\ .\sin a^{l\sin a^x}.\ a^{l\sin a^x + x}.\ \cot a^x.\ dx$$

22.) $da^{e^{a^{lx}}} = a^{e^{a^{lx}}}.\ la\ .\ de^{a^{lx}}$,

притомъ $de^{a^{lx}} = e^{a^{lx}}.\ da^{lx}$,

притомъ $da^{lx} = a^{lx}.\ la\ .\ dlx$,

притомъ $d\,lx = \frac{dx}{x}$ (об. II., II′. и III′. § 7.);

дакле после надлежне замене, вопросный

$$da^{e^{a^{lx}}} = a^{e^{a^{lx}}}.\ l^2a\ .\ e^{a^{lx}}.\ a^{lx}.\ \frac{dx}{x} = a^{e^{a^{lx}}+lx}.\ l^2a\ .\ e^{a^{lx}}.\ \frac{dx}{x}\ .$$

23.) $da^{\sin v\, e^{x\cos v\, x}} = a^{\sin v\, e^{x\cos v\, x}}.\ la\ .\ d\sin v\ e^{x\cos v\, x}$,

притомъ $d\sin v\ e^{x\cos v\, x} = \sin e^{x\cos v\, x}.\ de^{x\cos v\, x}$,

притомъ $de^{x\cos v\, x} = e^{x\cos v\, x}.\ d\,x\cos v\,x$,

притомъ $d\,x\cos v\,.\,x = (\cos v\,x\,dx + x\,d\cos v\,x)$,

притомъ $d\cos v\,x = -\cos x\,.\,dx$ (обр. II. § 7., X. § 10., II′. § 7., XI. § 10.); дакле ако надлежно заменемо, вопросный

$$da^{\sin v\, e^{x\cos v\, x}} = a^{\sin y\, e^{x\cos v\, x}}.\ la\ .\sin e^{x\cos v\, x}.\ e^{x\cos v\, x}\ .\ (\cos v\,x - x\cos x)\ dx.$$

24.) $d\sec a^{\cot e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.\,=x)}} = \sec a^{\cot e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.\,=x)}} \times$

$$\times tang\ a^{\cot e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.\,=x)}} \times da^{\cot e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v = x)}}$$

притомъ $da^{\cot e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.\,=x)}} = a^{\cot e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.\,=x)}}$

$$\times la\ .\ d\cot e^{l\,\mathrm{arc}\,(\sin v\,.\,=x)},$$

притомъ $d\,cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v.=x)} = -\frac{de^{l\,arc\,(sin\,v.=x)}}{sin\,e^{l\,arc\,(sin\,v.=x)}}$,

притомъ $de^{l\,arc\,(sin\,v.=x)} = e^{l\,arc\,(sin\,v.=x)}.\,dl\,arc\,(sin\,v.=x)$,

притомъ $dl\,arc\,(sin\,v.=x) = \frac{d\,arc\,(sin\,v.=x)}{arc\,(sin\,v.=x)}$,

притомъ $d\,arc\,(sin\,v.=x) = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

(обр. VIII. § 9., II. § 7., VII. § 9., II′. § 7., III′. § 7., XVIII. § 11.); дакле после надлежне замене, вопросный дифференціалъ

$$= sec\,a^{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v.=x)}}.\,tang\,a^{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v.=x)}}.\,a^{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v.=x)}}.\,la$$

$$\times \frac{-e^{l\,arc\,(sin\,v.=x)}\,dx}{sin^2 e^{l\,arc\,(sin\,v.=x)}.\,arc\,(sin\,v.=x).\sqrt{2x-x^2}}$$

$$\left[sec\,a^{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v.=x)}}.\,tang\,a^{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v.=x)}}\right.$$

$$\left.\times\, a^{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v.=x)}}.\,e^{l\,arc\,(sin\,v.=x)}\right]$$

$$= -\frac{}{sin^2 e^{l\,arc\,(sin\,v.=x)}.\,arc\,(sin\,v.=x).\sqrt{2x-x^2}}\,dx.$$

Найпосле

$$25.)\ d\,\frac{arc\,(cos=\sqrt{\frac{x}{lx}})}{cot\,(xa^{lx})}$$

$$= \frac{cot\,(xa^{lx})\,d\,arc\,(cos=\sqrt{\frac{x}{lx}}) - arc\,(cos=\sqrt{\frac{x}{lx}}).dcot\,(xa^{xl})}{cot^2\,(xa^{lx})},$$

притомъ 1.) $d\,arc\,(cos=\sqrt{\frac{x}{lx}}) = -\frac{d\sqrt{\frac{x}{lx}}}{\sqrt{1-\frac{x}{lx}}}$

$$= -\frac{\sqrt{lx}.\,d\sqrt{\frac{x}{lx}}}{\sqrt{lx-x}},$$

а ту опетъ $d\sqrt{\frac{x}{lx}} = \frac{d\frac{x}{lx}}{2\sqrt{\frac{x}{lx}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{lx}{x}} \cdot d\frac{x}{lx}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{lx}{x}} \cdot \frac{lx.dx - xdlx}{l^2x}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{lx}{x}} \cdot \frac{lx-1}{l^2x}\,dx$$

$$= \frac{lx-1}{2\,lx\sqrt{xlx}} \cdot dx,$$

2.) $d\,cot\,(xa^{lx}) = -\frac{dxa^{lx}}{sin^2(xa^{lx})} = -\frac{a^{lx}dx + xda^{lx}}{sin^2(xa^{lx})}$

$$= -\frac{a^{lx}dx + xa^{lx}la\,.\,dlx}{sin^2(xa^{lx})} = -\frac{a^{lx} + a^{lx}la}{sin^2(xa^{lx})}\,dx$$

$$= -\frac{a^{lx}(1+la)}{sin^2(xa^{lx})} \cdot dx;$$

дакле ако надлежно заменемо, вопросный

$$d\frac{arc\,(cos = \sqrt{\frac{x}{lx}})}{cot\,(xa^{lx})}$$

$$= \frac{cot\,(xa^{lx})\frac{lx-1}{2lx\sqrt{xlx-x^2}} + arc\,(cos = \sqrt{\frac{x}{lx}})\frac{a^{lx}(1+la)}{sin^2(xa^{lx})}}{cot^2\,(xa^{lx})}\,dx$$

$$= -\frac{[sin(xa^{lx})cos(xa^{lx})(lx-1) - 2arc(cos = \sqrt{\frac{x}{lx}})\,lx.a^{lx}(1+la) \times \sqrt{xlx-x^2}]}{2lx\,\sqrt{xlx-x^2}.\,cos^2\,(xa^{lx})}\,dx$$

$$= -\frac{[sin\,(2xa^{lx})\,(lx-1) - 4\,arc\,(cos = \sqrt{\frac{x}{lx}})\,lx\,.\,a^{lx}. \cdot (1+la)\,\sqrt{x\,lx-x^2}]}{4\,lx\,.\,\sqrt{x\,lx-x^2}\,cos^2\,(x\,a^{lx})}\,dx$$

$$= -\frac{sin(2xa^{lx})l\frac{x}{e} - 4\,arc\,(cos = \sqrt{\frac{x}{lx}}\,lx)\,a^{lx}.lae.\sqrt{xlx-x^2}}{4\,lx\,.\,\sqrt{x\,lx-x^2}.\,cos^2(xa^{lx})}\,dx$$

д.) Выши диференціали.

§ 17.

Видили смо у §. 2., да є диференціалъ сваке функціе $f(x)$ равнъ производу одъ нѣне прве изводне функціе $f_1(x)$ са диференціаломъ променљивога броя x, т. є. да є

$$d\,f(x) = f_1(x) \,.\, dx\,;$$

пошто є пакъ, каошто смо видили у I. Ч. § 11., прва изводна функція $f_1(x)$ или опетъ нека функція одъ x, или пакъ некій, по томъ брою сталный брой: то є дакле **диференціалъ сваке функціе $f(x)$ или опетъ нека функція одъ x, или пакъ некій по x сталный брой.**

Ако є 1.) $f_1(x)$ сталанъ брой, и притомъ dx такођеръ сталанъ, онда, каошто є лако увидити, съ $d\,f(x)$, т. є. са $f_1(x)\,dx$ неможемо никакву више премену предузети, разумемо онакову, каошто смо протолковали у §. 1.

Ако є напротивъ 2.) или $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, а dx притомъ сталанъ брой, или $f_1(x)$ сталанъ брой а dx променљивъ: онда, каошто є такођеръ лако увидити, у $d\,f(x)$, т. є. у $f_1(x)\,dx$ можемо наново узети $x + dx$ место x, и пытати за премену због тога, т. є. за $d\,d\,f(x) = d\,f_1(x)\,dx$. Тимъ пре пакъ можемо то наравно учинити, ако є

3.) не само $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, него уєдно и dx променљивъ брой.

Нашъ посао дакле быће сада, да извидимо, како се налази $d\,d\,f(x)$ у ова два последня случая; ради олакшице пакъ сматраћемо притомъ случай, гди є $f_1(x)$ сталанъ а dx променљивъ брой, само као особитый случай онога, у комъ є поредъ $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, уєдно dx променљивъ брой.

Имамо дакле изнаћи $d\,d\,f(x)$ найпре у случаю, ако є $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, dx пакъ сталанъ брой, а после у случаю, ако є $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, и уєдно dx цременљивый брой.

§ 18.

Уобште є

$$d\,d\,f(x) = d\,f_1(x)\,dx\,.$$

Предпоставляюћи ту, да є $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, а dx сталанъ брой, имамо пре свега по правилу II. § 4.

$$d\,d\,f(x) = d\,f_1\,(x)\,dx = dx\,.\,d\,f_1\,(x)\,.$$

Но диференціалъ є $f_1\,(x)$, као уобште сваке функціе диференціалъ, равањ производу одъ њене прве изводне функціе са dx, а прва є изводна функція прве изводне функціе неке функціе нико другій, но друга изводна функція ове функціе; слѣдователно

$$d\,d\,f(x = dx\,.\,d\,f_1\,(x) = dx\,.\,f_2\,(x)\,dx$$
$$= f_2\,(x)\,d^2x\,.$$

Диференціалъ даференціала неке $f(x)$, т. є. $d\,d\,f(x)$ зове се другій диференціалъ те функціе, а означує се подобно разлици разлике, кою смо у I. Ч. представляли съ $^2\Delta f(x)$, символомъ $^2d\,f(x)$. Служећи се съ овимъ символомъ, имамо дакле, да є при горњемъ предпостављеню.

$$^2d\,f(x) = f_2\,(x)\,d^2x \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha.,$$

то ће рећи: другій диференціалъ сваке $f(x)$, равањ є производу одъ њене друге изводне функціе са квадратомъ диференціала променљивога броя x, т. є. съ d^2x.

Изъ тога израза слѣдує просто овай важный другій

$$\frac{^2d\,f(x)}{d^2x} = f_2\,(x) \qquad \ldots\ldots\ldots \quad \beta.,$$

кои показує, да є размера одъ другогъ диференціала сваке $f(x)$ са квадратомъ диференціала променљивога броя, равна другой изводной функціи исте функціе $f(x)$, и као такова дакле или опетъ нека функція одъ x, или пакъ некій по x сталный брой.

Та се размера зове другій диференціалный количникъ, или обзиромъ на изразъ $\alpha.$), другій диференціалный сачинитель дотичне функціе $f(x)$.

§ 19.

Ако є у другомъ диференціалу функціє $f(x)$, при сталномъ dx, $f_2(x)$ опетъ нека функція одъ x, имамо

$$d\,{}^2d\,f(x) = d\,.\,f_2(x)\,d^2x = d^2x\,.\,d\,f_2(x),$$

или, изъ узрока што є $d\,f_2(x)$, као уобште диференціалъ сваке функціє одъ x, производъ одъ прве изводне функціє те $f_2(x)$ са dx, а прва изводна функція одъ $f_2(x)$ нико другій ніе, но **трећа** изводна функція основне функціє $f(x)$:

$$d\,{}^2d\,f(x) = d^2x\,.\,d\,f_2(x) = d^2x\,.\,f_3(x)\,dx$$
$$= f_3(x)\,d^3x.$$

$d\,{}^2d\,f(x)$ зове се **трећій** диференціалъ функціє $f(x)$, а означує се ради краткоће, символомъ ${}^3d\,f(x)$. Служећи се тиме имамо дакле

$${}^3d\,f(x) = f_3(x)\,d^3x \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma.,$$

т. є. да є трећій диференціалъ сваке функціє $f(x)$ равањ производу одъ њене треће изводне функціє $f_3(x)$ са кубомъ — d^3x — диференціала одъ x.

Одтудъ опетъ слѣдує непосредно

$$\frac{{}^3d\,f(x)}{d^3x} = f_3(x) \qquad \ldots\ldots\ldots \quad \delta.,$$

то ће рећи: размера одъ ${}^3d\,f(x)$ съ кубомъ диференціала одъ x, равна є трећой изводной функціи функціє $f(x)$, и као такова или опетъ нека функція одъ x, или пакъ некій, по x сталный брой.

Та размера зове се **трећій** диференціалный количникъ, или обзиромъ на изразъ $\gamma.$), трећій диференціалный сачинитељ дотичне функціє $f(x)$.

На истый начинъ налазимо, ако є $f_3(x)$ поредъ сталнога dx опетъ нека функція одъ x,

$$\left.\begin{aligned} {}^4d\,f(x) &= f_4(x)\,d^4x \\ \frac{{}^4d\,f(x)}{d^4x} &= f_4(x) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon.,$$

а одатле

и т. д., докъ найпосле уобште:

$$\left.\begin{aligned} {}^nd\,f(x) &= f_n(x)\,d^nx \\ \frac{{}^nd\,f(x)}{d^nx} &= f_n(x) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.$$

§ 20.

${}^2d\,f(x)$, ${}^3d\,f(x)$, ... ${}^nd\,f(x)$ зову се скупа выши диференціали функціе $f(x)$, изъ предходећи §§а пакъ видимо, да се ти диференціали, при предпоставлѣню dx сталанъ брой, односно изъ $d\,f(x)$, ${}^2d\,f(x)$, ${}^3d\,f(x)$, ... ${}^{n-1}d\,f(x)$ на онай истый начинъ, т. є. по истимъ правилама и образцима добыяю, као $d\,f(x)$ изъ $f(x)$. —

Садъ да видимо, како се налазе выши диференціали $f(x)$ у случаю, гди є поредъ пременльивога dx, $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x.

§ 21.

Опетъ велимо: уобште є $d\,f(x) = f_1(x)\,dx$.

Предпоставляюћи ту да є $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, дакле **пременльива**, а dx такођеръ **пременльивъ**: слѣдує по IV. правилу §а 4.

$$\begin{aligned} {}^2d\,f(x) = d\,f_1(x)\,dx &= dx\,.\,d\,f_1(x) + f_1(x)\,.\,d\,dx \\ &= dx\,.\,f_2(x)\,dx + f_1(x)\,.\,{}^2dx \\ &= f_2(x)\,d^2x + f_1(x)\,.\,{}^2dx \quad . \quad . \quad . \quad (\text{a.}, \end{aligned}$$

$$\text{и одтудъ} \qquad \frac{{}^2d\,f(x)}{d^2x} = f_2(x) + f_1(x)\,\frac{{}^2dx}{d^2x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{б.}$$

Узимаюћи у а.) да є и $f_2(x)$ опетъ нека функція одъ x, добыямо далѣ помоћу III. и IV. правила §а 4., прећашньи докученя подъ 3.) и образца I. §а 6.:

$$^3d\,f(x) = d^2x\,.\,d\,f_2(x) + f_2(x)\,d\,d^2x + {}^2dx\,.\,d\,f_1(x) + f_1(x).d\,{}^2dx$$
$$= d^2x.f_3(x)\,dx + f_2(x).\,2\,dx.{}^2dx + {}^2dx\,.\,f_2(x)dx + f_1(x).{}^3dx$$
$$= f_3(x)\,d^3x + 3\,f_2(x)\,.{}^2dx\,.\,dx + f_1(x)\,.{}^3dx \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\text{в.},$$

и одтудъ

$$\frac{^3d\,f(x)}{d^3x} = f_3(x) + 3\,f_2(x)\,\frac{^2dx}{d^2x} + f_1(x)\,\frac{^3dx}{d^3x} \;.\;.\;.\;(\text{г.}$$

И т. д.

Ово є безъ сумнѣ довольно за подпуно увиђанѣ, да су изрази выши диференціала у овомъ сада сматраномъ случаю истина сложеніи одъ оны у првомъ случаю, но да њиово налазенѣ неподлежи никаквой другой тешкоћи.

§ 22.

После овога врло є лако докучити више диференціале функціе $f(x)$ іошъ и у случаю, ако є само dx пременљивъ брой, $f_1(x)$ пакъ по x стална.

Изъ пређашњи израза подъ а., б., в. и г.), слѣдує уричући $f_1(x)$ као сталну, због $f_2(x) = f_3(x) = . .$ $. . =$ тада нулли,

$$^2df(x) = f_1(x)\,.\,{}^2dx, \text{ дакле } \frac{^2d\,f(x)}{d^2x} = f_1(x)\,.\,\frac{^2dx}{d^2x};$$

$$^3df(x) = f_1(x)\,.\,{}^3dx, \quad \text{„} \quad \frac{^3d\,f(x)}{d^3x} = f_1(x)\,.\,\frac{^3dx}{d^3x};$$

. . . . . .

све онако исто, као што бы нашли независно одъ поменуты израза изъ $d\,f(x) = f_1(x)\,dx$, предпоставляюћи одма, да є $f_1(x)$ сталанъ брой, а само dx пременљивъ.

§ 23.

За ова два последня случая (§. 21. и 22.) имамо іошъ слѣдующе приметити:

dx као сталанъ може се на разный начинъ мењати, и зато остаю у истимъ случаєвима выши диференціали

функціе $f(x)$, или што є свеєдно нѣни выши диференціални количници дотле неопределѣни, доклегодъ се задаткомъ или природомъ дотичнога предмета неутврде вредности количника $\frac{^2dx}{d^2x}$, $\frac{^3dx}{d^3x}$, и т. д. Довольно є међутимъ, да є условлѣнъ или иначе познатъ само првый, т. є. само $\frac{^2dx}{d^2x}$, єръ се съ нѣимъ, каошто ћемо одма видити, врло лако могу определити и сви остали.

Ако є $\frac{^2dx}{d^2x} = \varphi(x)$ нека известна (дата, или природомъ задатка подаюћа се) функція одъ x, добыямо

$$^2dx = \varphi(x)\, d^2x;$$

одтудъ пакъ, узимаюћи лево и десно диференціале по правилу IV. § 4., слѣдуе

$$\begin{aligned} ^3dx &= d^2x \,.\, d\varphi(x) + \varphi(x)\, dd^2x \\ &= d^2x \,.\, \varphi_1(x)\, dx + 2\varphi(x) \,.\, ^2dx \,.\, dx \\ &= \varphi_1(x)\, d^3x + 2\varphi(x) \,.\, ^2dx \,.\, dx; \end{aligned}$$

дакле ако съ d^3x разделимо,

$$\frac{^3dx}{d^3x} = \varphi_1(x) + 2\varphi(x)\ \frac{^2dx}{d^2x} = \varphi_1(x) + 2\varphi^2(x),$$

подпуно определѣнъ.

На истый начинъ можемо изнаћи изъ $\frac{^3dx}{d^2x}$ четвртый диференціалный количникъ, изъ овога после 5., и т. д. свакій слѣдуюћій.

§ 24.

Другій диференціалный количникъ $\frac{^2dx}{d^2x}$ у случаевима о коима говоримсмо, утврђуе се обично задаванѣмъ друге іошъ неке функціе поредъ дате, съ условіемъ: да првый диференціалъ те друге функціе буде сталанъ брой.

Тако н. п. ако бы тражили више диференціале одъ e^{lx} съ тимъ условіемъ, да првый диференціалный количникъ одъ $sin\, lx$ буде сталанъ брой имали бы

$$d\, sin\, lx = cos\, lx \,.\, dlx = \frac{cos\, lx}{x} \,.\, dx\,,$$

и тай треба да є = некомъ сталномъ брою; тога ради ако наново диференціалимо, мора быти

$$^2d\, sin\, lx = d\,.\,\frac{cos\, lx}{x} = dx\,.\,d\,\frac{cos\, lx}{x} + \frac{cos\, lx}{x}\,.\,ddx$$

$$= dx\,.\,\frac{-\,x\, sin\, lx\,.\,dlx - cos\, lx\,.\,dx}{x^2} + \frac{cos\, lx}{x}\,dx$$

$$= -\,\frac{sin\, lx + cos\, lx}{x^2}\,d^2x + \frac{cos\, lx}{x}\,.\,{}^2dx$$

$$= \frac{x\, cos\, lx\,.\,{}^2dx \;-\; (sin\, lx + cos\, lx)\; d^2x}{x^2}$$

$= 0$, т. є.

$$x\, cos\, lx\,.\,{}^2dx \;-\; (sin\, lx + cos\, lx)\, d^2x = 0\,,$$

и одтудъ

$$\frac{{}^2dx}{d^2x} = \frac{sin\, lx + cos\, lx}{x\, cos\, lx}\,,$$

подпуно определѣнъ.

Ово наново диференціалећи добыли бы трећій диференціалный количникъ, изъ тога после на истый начинъ 4., и т. д. све слѣдующе такођеръ подпуно определѣне.

Ако дакле потомъ узмемо

$$de^{lx} = e^{lx}\,.\,dlx = \frac{e^{lx}}{x}\,.\,dx\,,$$

и наново диференціалимо, слѣдуе

$$^2de^{lx} = dx \cdot d\frac{e^{lx}}{x} + \frac{e^{lx}}{x} \cdot {}^2dx$$

$$= dx \cdot \frac{xde^{lx} - e^{lx} \cdot dx}{x^2} + \frac{e^{lx}}{x} \cdot {}^2dx$$

$$= dx \cdot \frac{e^{lx} - e^{lx}}{x^2} \cdot dx + \frac{e^{lx}}{x} \cdot {}^2dx$$

$$= \frac{e^{lx}}{x} \cdot {}^2dx \text{ , и одтудъ}$$

$$\frac{^2de^{lx}}{d^2x} = \frac{e^{lx}}{x} \cdot \frac{^2dx}{d^2x},$$

а ако іошъ за $\frac{^2dx}{d^2x}$ узмемо нѣгову нађену вредность,

$$\frac{^2de^{lx}}{d^2x} = \frac{e^{lx}}{x} \cdot \frac{\sin lx + \cos lx}{x \cos lx} = \frac{e^{lx} \cdot (\sin lx + \cos lx)}{x^2 \cos lx},$$

подпуно определѣнъ.

Подобно добыли бы и остале више диференціалне количнике вопросне функціе, све определѣне.

Садъ намъ само іошъ остає узети за упражнѣнѣ у вышемъ диференціаленю неколико

Примера

съ предпоставлѣнѣмъ, да є dx сталанъ.

§ 25.

1.) Нашли смо у § 6.

$$dx^n = nx^{n-1} \cdot dx.$$

Узимаюћи наново диференціалъ, добыямо по истогъ § образцу I.

$$^2dx^n = n(n-1)\, x^{n-2} \cdot d^2x = n^{2|-1} \cdot x^{n-2} \cdot d^2x.$$

Одатле на истый начинъ

$$^{3}dx^{n} = n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}.\,d^{3}x = n^{3\underline{|}-1}.\,x^{n-3}.\,d^{3}x.$$

И на истый начинъ далѣ, докъ найпосле уобште

$$^{\nu}dx^{n} = n^{\nu\underline{|}-1}.\,x^{n-\nu}.\,d^{\nu}x,$$

Ако бы притомъ брой n было цео и положанъ, онда є $^{n}dx^{n}$, због $x^{n-n} = x^{0} = 1$ сталанъ брой, и зато сви іошъ выши диференціали одъ x^{n} нулле. При свакомъ другомъ брою n пакъ, може се диференціалити безъ краја.

2.) У §. 7. добыли смо $da^{x} = a^{x}\,la\,.\,dx$; зато

$$^{2}d\,a^{x} = la\,dx\,.\,d\,a^{x} = la\,dx\,.\,a^{x}\,la\,dx = a^{x}\,la^{2}\,.\,d^{2}x,$$

одтудъ опетъ $^{3}d\,a^{x} = a^{x}\,l^{3}a\,.\,d^{3}x$, и т. д. докъ уобште

$$^{n}d\,a^{x} = {}^{n}d\,a^{x} = a^{x}\,l^{n}a\,.\,d^{n}x.$$

3.) У истомъ §у имали смо $d\,lx = \frac{dx}{x}$ мора дакле быти

$$^{2}d\,lx = dx\,.\,d\,\frac{1}{x} = dx\,.\,\frac{-dx}{x^{2}} = -\,\frac{d^{2}x}{x^{2}},$$

$$^{3}d\,lx = -\,d^{2}x\,.\,d\,\frac{1}{x^{2}} = -\,d^{2}x\,.\,\frac{-2\,dx}{x^{3}} = +\,\frac{2\,d^{3}x}{x^{3}},$$

$$^{4}d\,lx = -\,2\,d^{3}x\,.\,d\,\frac{1}{x^{3}} = 2\,d^{3}x\,.\,\frac{-3\,dx}{x^{4}} = \frac{-2\,.\,3\,d^{4}x}{x^{4}},$$

и т. д. докъ найпосле

$$^{n}d\,lx = (-1)^{n-1}\,.\,(n-1)\,!\,.\,\frac{d^{n}x}{x^{n}}.$$

4.) По § 8. є $d\,sin\,x = cos\,x\,.\,dx$; зато по истомъ §-у

$$^2d\ sin\ x = -\ sin\ x\,.\,d^2x,$$

$$^3d\ sin\ x = -\ cos\ x\,.\,d^3x,$$

$$^4d\ sin\ x = sin\ x\,.\,d^4x,$$ и т. д. докъ уобште

$$^{2n-1}d\ sin\ x = (-1)^{n+1}\ cos\ x\,.\,d^{2n-1}x,$$

$$^{2n}d\ sin\ x = (-1)^n\ sin\ x\,.\,d^{2n}x.$$

5.) § 10. показує $d\ sin\ v\,.\,x = sin\ x\,dx$; быт'ће дакле

$$^2d\ sin\ v\,.\,x = cos\ x\,.\,d^2x,$$

$$^3d\ sin\ v\,.\,x = -\ sin\ x\,.\,d^3x,$$

$$^4d\ sin\ v\,.\,x = -\ cos\ x\,.\,d^4x,$$

. . . . . ., уобште

$$^{2n-1}d\ sin\ v\,.\,x = (-1)^{n+1}\,.\,sin\ x\,.\,d^{2n-1}x,$$ а

$$^{2n}d\ sin\ v\,.\,x = (-1)^{n+1}\,.\,cos\ x\,.\,d^{2n}x.$$

6.) У § 11. имали смо $d\ arc\ (sin = x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; мора дакле быти

$$^2d\ arc\ (sin = x) = dx\,.\,d\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= dx\,.\,(-\tfrac{1}{2})\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,.\,(-2\,x\,dx)$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,.\,x\,d^2x$$

$$= \frac{x\,d^2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}},$$

$$^3d\ arc\ (sin = x) = d^2x\,.\,d\,x\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= d^2x\,.\,[(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx + x\,d\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}]$$

$$= d^2x\,.\,[(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx - \tfrac{3}{2}\,x\,(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\,.\,d\,(1-x^2)]$$

$$= d^2x\left[(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx - \tfrac{3}{2}x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}.(-2x\,dx)\right]$$

$$= \left[(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\right] d^3x$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.\left[1+3x^2(1-x^2)^{-1}\right] d^3x$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.\left[1+\frac{3x^2}{1-x^2}\right] d^3x$$

$$= \frac{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1+2x^2)\,d^3x}{(1-x^2)}$$

$$= \frac{(1+2x^2)\,d^3x}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{(1+2x^2)\,d^3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

И т. д., найпосле

7.) По § 13. є $d\,ll\,x = \frac{dx}{x\,lx}$. **Дакле**

$$^2d\,ll\,x = dx\cdot d\frac{1}{x\;lx} = dx\cdot\frac{-d\,x\,lx}{x^2\;l^2x}$$

$$= -\,dx\cdot\frac{lx\,dx+dx}{x^2\;l^2x} = -\frac{lx+1}{x^2\,lx^2}\cdot d^2x$$

$$^3d\,ll\,x = -\,d^2x\,.\,d\frac{lx+1}{x^2\;lx^2}$$

$$= -\,d^2x\cdot\frac{x^2\,l^2x\,.\,d(lx+1)-(lx+1)\,d\,x^2\;l^2x}{x^4\;l^4x}$$

$$= -\,d^2x\cdot\frac{x^2l^2x\cdot\frac{dx}{x}-(lx+1)(l^2x.2xdx+x^2\,d\,l^2x)}{x^4\,.\,l^4x}$$

$$= -\,d^2x\cdot\frac{x\,l^2x\,.\,dx-(lx+1)\left(2\,x\,l^2x\,dx+x^2\,2lx\,\frac{dx}{x}\right)}{x^4\;l^4x}$$

$$= - d^2x \cdot \frac{xl^2x dx - 2xl^3x dx - 2xl^2x dx - 2xl^2x dx - 2xlx dx}{x^4\ l^4x}$$

$$= d^2x \cdot \frac{3\,x\,l^2x\,dx + 2\,x\,l^3x\,dx + 2\,x\,lx\,dx}{x^4\ lx^4}$$

$$= \frac{2 + 3\,lx + 2\,l^2x}{x^3\ l^3x} \cdot d^3x \text{ , и т. д.}$$

е.) Телеровъ образацъ.

§ 26.

По § 11. Ч. I. имамо

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f_1(x)\,h + f_2(x)\frac{h^2}{2!} \pm f_3(x)\ \frac{h^3}{3!} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Узимаюħи место $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... у §§ 3., 18. и 19. наħене њиове вредности, добыя овай образацъ видъ

$$f(x \pm h) = f(x) \pm \frac{df(x)}{dx}\,h + \frac{^2df(x)}{d^2x} \cdot \frac{h^2}{2!} \pm \frac{^3df(x)}{d^3x} \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot,$$

у комъ є познатъ подъ именомъ **Телеровъ** (Taylor) **образацъ, Телеровъ редъ,** или **Телерова Теорема.**

Тай є образацъ у анализи одъ врло велике важности, постои (као што є у 11 § I. Ч. веħъ речено), докъ є x неопределħнъ или обштій брой, за **сваку** безъ разлике функцію, служи пакъ пре свега за опредељиванħ премене функціе $f(x)$ због наращтая или умаляя броя x съ **произвольнимъ** броємъ h, а после, осимъ другога, іошъ за развіянħ функція у редове.

Казато є веħъ у преħепоменутомъ § I. Ч., али опетъ споминħмо: ако $f(x)$ ніе функція алгебрайска раціонална цела, онда є на ню употребљеный телеровъ редъ безкраянъ, због чега у таковомъ случаю добро валя пазити на нħгову сбирљивость. Да ли є сбирљивъ показатħе по § 121. I. Ч. изразъ

$$D_n = \frac{f_{n-1}(x)\,\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f_n(x)\,\frac{h^n}{n!}}{f_{n-1}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} - f_n(x)\,\frac{h^n}{n!}} = \frac{f_n(x)\,\frac{h^n}{n!}}{1-\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}\cdot\frac{h}{n}}$$

тиме, што у случаю сбирљивости истый изразъ при $n = \infty$ мора быти $= 0$.

Найпосле іошъ примећавамо, да ћемо мы у будуће телеровъ редъ, гдигодъ узтреба, због веће простоте употреблявати у ономъ првомъ нћговомъ, іошъ изъ I. Ч. познатомъ виду, а и иначе писат'ћемо одяко изъ истогъ узрока место $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{^2df(x)}{d^2(x)}$, и т. д. свуда $f_1(x)$, $f_2(x)$, и т. д. коє молимо да се єданпутъ за свагда запамти.

Садъ да видимо горе споменута два употреблћня телеровогъ реда.

§ 27.

1.) Тражи се премена функціе

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1,$$

због $x - 1$ место x.

Ту є $f_1(x) = 12x^2 - 6x + 2$, $f_2(x) = 24x - 6$, $f_3(x) = 24$, а остали диференціални количници сви $= 0$. Дакле є због $h = -1$ по вопросномъ образцу

$$f(x-1) = f(x) - (12x^2 - 6x + 2).1 + (24x - 6).\frac{1}{2!} - 24\cdot\frac{1}{3!}$$

$$= f(x) - 12x^2 + 18x - 9,$$

и одтудъ дате функціе тражена премена:

$$f(x-1) - f(x) = -12x^2 + 18x - 9.$$

2.) Шта быва одъ $f(x) = \sin x$, ако у истой узмемо $2x = x + x$ место x?

Због $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = -\sin x$, $f_3(x) = -\cos x$, $f_4(x) = \sin x$, и т. д. (§ 25.), имамо по телеровомъ образцу $f(x+x) = f(2x)$, т. є.

$$\sin 2x = \sin x + \cos x \,.\, x - \sin x \,.\, \frac{x^2}{2!} - \cos x \,\frac{x^3}{3!} + \sin x \,.\, \frac{x^4}{4!} - \cdot\cdot$$

$$= \sin x \,.\, (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdot\cdot\cdot) + \cos x \,.\, (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdot\cdot\cdot\cdot) \,.$$

Но по I. Ч. § 163. заграђеный чинитель првога члана ніе нико другій но $\cos x$, а заграђеный чинитель другога члана опетъ нико другій но $\sin x$. Дакле съ обзиромъ на то

$$\sin 2x = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x \,,$$

каогодъ што смо нашли у тригонометріи на другій начинъ.

3.) Шта добыямо одъ $f(x) = \cos x$, ако место x узмемо $x + y$?

Ту є по § 8. $f_1(x) = -\sin x$, $f_2(x) = -\cos x$, $f_3(x) = \sin x$, $f_4(x) = \cos x$, ... Дакле ако у датой функціи место x узмемо $x + y$, мора быти по телеровомъ образцу $f(x + y)$, т. є.

$$\cos(x+y) = \cos x - \sin x \,.\, y - \cos x \,.\, \frac{y^2}{2!} + \sin x \,\frac{y^3}{3!} + \cos x \,\frac{y^4}{4!}$$

$$- \sin x \,.\, \frac{y^5}{5!} - \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$= \cos x \,.\, (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdot\cdot) - \sin x \,.\, (y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdot\cdot\cdot)$$

$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \textbf{(I. Ч. § 163.)}$$

каогодъ што смо нашли у тригонометріи.

§ 28.

1.) Тражи се редъ за lx.

По § 25. су диференціални количници одъ $f(y) = ly$,

по реду $f_1(y) = \frac{1}{y}$, $f_2(y) = \frac{-1}{y^2}$, $f_3(y) = \frac{2!}{y^3}$, $f_4(y) = \frac{3!}{y^4}$,

и т. д. Мора дакле быти по телеровомъ образцу

$$f(y+z) = ly + \frac{z}{y} - \frac{z^2}{2!\,y^2} + \frac{2!\,z^3}{3!\,y^3} - \frac{3!\,z^4}{4!\,y^4} + \cdots\cdots$$

$$= ly + \frac{z}{y} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{y^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{z^3}{y^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{z^4}{y^4} + \cdots\cdots,$$

и одтудъ, ако узмемо $y=1$, а $z = x-1$, заогъ $l1 = 0$:

$$lx = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots\cdots,$$

каогодъ што є нађено у I. Ч. § 162.

2.) Ише се редъ за $f(x) = \sin x$.

По § 25. єсу количници одъ $f(y) = \sin y$ по реду:

$$f_1(y) = \cos y\,,\ f_2(y) = -\sin y\,,\ f_3(y) = -\cos y\,,\ f_4(y) = \sin y, \ldots$$

По телеровомъ образцу мора дакле быти $f(y+z)$, т. є.

$$\sin(y+z) = \sin y + \cos y\,.\,z - \sin y\,.\,\frac{z^2}{2!} - \cos y\,.\,\frac{z^3}{3!} + \sin y\,.\,\frac{z^4}{4!}$$

$$+ \cos y\,.\,\frac{z^5}{5!} - \cdots\cdots\cdots,$$

и одтудъ, ако узмемо $y=0$, а z изменемо съ x, збогъ $\sin 0 = 0$, а $\cos 0 = 1$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots,$$

каогодъ у I. Ч. § 163. на другій начинъ. — Найпосле

3.) Тражи се редъ за $f(x) = \sqrt{x}$.

По § 6. обр. I. имамо одъ $f(y) = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$ диференціалне количнике редомъ $f_1(y) = \frac{1}{2}\cdot y^{-\frac{1}{2}}$, $f_2(y) = -\frac{1}{2^2}\cdot y^{-\frac{3}{2}}$,

$$f_3(y) = \frac{3}{2^3}\cdot y^{-\frac{5}{2}},\ f_4(y) = -\frac{3\,.\,5}{2^4}\cdot y^{-\frac{7}{2}},\ f_5(y) = \frac{3\,.\,5\,.\,7}{2^5} y^{-\frac{9}{2}}, \ldots$$

Мора быти дакле по телеровомъ образцу

$$f(y+z) = (y+z)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{т. є.}$$

$$\sqrt{y+z} = y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot y^{-\frac{1}{2}}.z - \frac{1}{2^2}\cdot y^{-\frac{3}{2}}.\frac{z^2}{2!} + \frac{1.3}{2^2}\cdot y^{-\frac{5}{2}}.\frac{z^3}{3!} -$$

$$- \frac{1.3.5}{2^4}\cdot y^{-\frac{7}{2}}.\frac{z^4}{4!} + \frac{1.3.5.7}{2^5}\cdot y^{-\frac{9}{2}}.\frac{z^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots,$$

одатле пакъ, ако узмемо $y = 1$, а $z = x - 1$:

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2^2.2!}(x-1)^2 + \frac{1.3}{2^3.3!}(x-1)^3 -$$

$$- \frac{1.3.5}{2^4.4!}(x-1)^4 + \frac{1.3.5.7}{2^5.5!}(x-1)^5 - \ldots\ldots$$

§ 29.

Тражећи телеровимъ образцемъ $f(x+h)$ за известне вредности броя x, догодит'ће се при деловнимъ и логаритмійскимъ функціяма, и само при таковима, да чланови траженога реда, или одма одъ првога, или пакъ одъ каквогъ другогъ надалѣ, постаю за уречену вредность одъ x вида $\frac{a}{o}$, т. є. безкрайни. То є знакъ, да се при дотичной $f(x)$ тражена $f(x+h)$ за оно x неможе развити у редъ степена одъ h съ целимъ положнимъ изложительима. При функціама првога рода садржат'ће у таковомъ случаю захтеваный редъ степене одъ h съ одречнимъ изложительима, — при онима другога рода степене одъ h съ положнимъ деловнимъ изложительима, а при последньима появлює се трансцендентный брой lh, кои се, каошто смо већъ видили на другомъ месту (I. Ч. § 162.) никако неможе развити у редъ степена одъ h съ целимъ изложительима. Све то пакъ случит'ће се и при тима функціяма само онда, ако у деловной функціи именитель, у ирраціоналной подкореный брой, а у логаритмійской найпосле онай брой, кога се тиче знакъ логаритма: постаю за уречено x равни нулли.

У сваком таковом случаю дакле издає насъ телеровъ образацъ, и морамо се зато служити за опредељиванѣ реда $f(x+h)$ другимъ, ако млого пута и неудобніимъ простимъ начиномъ. Да пакъ све овде примет'ѣено доиста тако постои, о томе уверит'ѣе насъ довольно слѣдуюћи §§-и.

§ 30.

1.) Тражи се редъ $f(x+h)$ одъ $f(x) = \frac{x}{x-a}$, за $x = a$.

При той є функціи

$$f_1(x) = -\frac{a}{(x-a)^2},\ f_2(x) = \frac{2!\,a}{(x-a)^3},$$

$$f_3(x) = -\frac{3!\,a}{(x-a)^4},\ \text{и т. д.}$$

Имамо дакле по телеровомъ образцу

$$f(x+h) = \frac{x}{x-a} - \frac{a}{(x-a)^2}\cdot h + \frac{2!\,a}{(x-a)^3}\cdot\frac{h^2}{2!} - \frac{3!\,a}{(x-a)^4}\cdot\frac{h^3}{3!} + \ldots.$$

$$= \frac{x}{x-a} - \frac{a}{(x-a)^2}\cdot h + \frac{a}{(x-a)^3}\cdot h^2 - \frac{a}{(x-a)^4}\cdot h^3 + \ldots,$$

а ако место x узмемо уречену нѣгову вредность a:

$$f(a+h) = \frac{a}{0} - \frac{a}{0}\cdot h + \frac{a}{0}\cdot h^2 - \ldots\ldots\ldots,$$

изъ чега видимо да $f(x+h)$ за $x = a$ развити у редъ степена одъ h съ целимъ положнимъ изложительима ніе могуће.

И доста, ако у датой функціи узмемо $a+h$ место x, и после далѣ просто поступимо, слѣдує

$$f(a+h) = \frac{a+h}{a+h-a} = \frac{a+h}{h} = \frac{a}{h} + 1 = ah^{-1} + 1,\ \text{т. є.}$$

функція не съ положнимъ, но одречнимъ целимъ степеномъ одъ h.

2.) Иште се редъ $f(x+h)$ одъ $f(x) = a\sqrt{x(x-b)}$, за $x = b$.

Ту су диференціални количници редомъ

$$f_1(x) = \frac{a(2x-b)}{2\sqrt{x(x-b)}},\ f_2(x) = -\frac{ab^2}{4x(x-b)\sqrt{x(x-b)}},$$

и т. д. Због тога по телеровомъ образцу уобште

$$f(x+h) = a\sqrt{x(x-b)} + \frac{a(2x-b)}{2\sqrt{x(x-b)}} \cdot h - \ldots\ldots\ldots,$$

а ако узмемо $x = b$,

$$f(b+h) = 0 + \frac{ab}{0} \cdot h - \ldots\ldots\ldots,$$

за знакъ, да се $f(x+h)$ одъ дате функціе $f(x)$, за $x = b$ неможе представити као редъ степена одъ h съ **целимъ положнимъ изложительима.**

И доиста, ако у $f(x)$ узмемо $b+h$ место x, слѣдуе

$$f(b+h) = a\sqrt{(b+h)\,h} = ah^{\frac{1}{2}} \cdot (b+h)^{\frac{1}{2}}$$

$$= ah^{\frac{1}{2}} \cdot \left(b^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{h^2}{2!\,b^{\frac{3}{2}}} + \ldots\ldots\right),$$

истина као редъ степена одъ h, али не съ **целимъ**, но **деловнимъ положнимъ изложительима.**

Најпосле

3.) Потребна є $f(x+h)$ одъ $f(x) = x + a.l(x-a)$, за $x = a$.

Ту є

$$f_1(x) = \frac{x}{x-a},\ f_2(x) = -\frac{a}{(x-a)^2},\ f_3(x) = \frac{2!\,a}{(x-a)^3},\ \text{и т. д.}$$

Дакле по Телеру

$$f(x+h) = [x + al(x-a)] + \frac{x}{x-a} \cdot h - \frac{a}{(x-a)^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots$$

и одтудъ $f(a+h) = (a+alo) + \frac{a}{o} \cdot h - \frac{a}{o} \cdot \frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots$

$= (a - a\infty) + \frac{a}{o} \cdot h - \ldots\ldots\ldots\ldots,$

изъ чега є видити, да се $f(x+h)$ одъ дате функціе неможе развити у редъ степена одъ h съ целимъ положнимъ изложительима.

И доиста, ако у датой функціи узмемо $a+h$ место x, добыямо $f(x+h) = a + h + lh$, а познато є, да се lh никако неможе изразити као редъ по целимъ положнимъ степенима одъ h.

Іошъ да испытамо поизближе $f(x+h)$ у случаю, гди се $f(x)$ неможе развити у редъ степена одъ h съ целимъ положнимъ изложительима.

§ 31.

Ако су $f(x)$ и $f(x+h)$ и при **изчезльивомъ** брою h за какву известну вредность броя $x = \alpha$ **доистие**: онда разлику $f(x+h) - f(x)$ или никако неможемо развити у редъ по h, или пакъ тай редъ може садржати само степене одъ h съ **положнимъ**, иначе целимъ или деловнимъ изложительима. Єръ ако бы допустили да h у томъ реду може стаяти и съ одреченимъ изложительима, онда бы свакій членъ съ таковимъ h за $h = o$ постао вида $\frac{\alpha}{o}$, и она бы разлика тако была **безкрайна**, коє при горнѣмъ предпоставлѣню, по комъ нѣна вредность за $h = o$ мора быти такоѣеръ $= o$, никако неможе да буде.

Ово прсдпославши узмимо, да смо на какавъ нибудъ начинъ за $x = \alpha$ нашли разлику $f(x+h) - f(x)$, уреѣену по растуѣимъ степенима одъ h,

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) = A_1 h^{n_1} + A_2 h^{n_2} + A_3 h^{n_3} + \ldots \quad (1.,$$

тако дакле, да у овоме реду стои

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.$$

У томъ случаю може быти првый изложитель n_1 само $\leqq 1$; єръ ако бы было > 1, онда бы могли првомъ члану $A_1 h^{n_1}$ предпоставити другій съ h^1, коєга є сачинитель $A = 0$, тако да є после првый изложитель опетъ не > 1, но $= 1$.

Исто тако можемо доказати, да другій изложитель n_2 неможе быти > 2, но само $\leqq 2$, трећій n_3 не > 3, но само $\leqq 3$, и т. д.

Сматраюћи у горньой єдначини подъ 1.) брой h као пременљивъ, и образуюћи у той єдначини лево и десно редомъ све изводне функціє (диференціалне количнике) по h, имамо обзиромъ на то, да є $f(\alpha)$ по h сталанъ брой: прва изводна функція одъ $x + h$ по h, т. є.

$$\left.\begin{aligned} f_1(\alpha+h)_h &= n_1 A_1 h^{n_1-1} + n_2 A_2 h^{n_2-1} + n_3 A_3 h^{n_3-1} + \ldots \\ f_2(\alpha+h)_h &= n_1^{2|-1}.A_1 h^{n_1-2} + n_2^{2|-1}.A_2 h^{n_2-2} + n_3^{2|-1}.A_3 h^{n_3-2} + \\ f_3(\alpha+h)_h &= n_1^{3|-1}.A_1 h^{n_1-3} + n_2^{3|-1}.A_2 h^{n_2-3} + n_3^{3|-1}.A_3 h^{n_3-3} + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (3.,$$

при чему є, каошто знамо изъ I. Ч., $n_1^{2|-1} = n_1(n_1 - 1)$, $n_1^{3|-1} = n_1(n_1-1)\ (n_1-2)$, и т. д.

Поставляюћи садъ у овимъ изразима $h = 0$, добыямо лево по реду $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, ..., т. є. диференціалне количнике одъ $f(x)$ за $x = \alpha$, десно пакъ остає одъ свакога оно, чему су ти количници при $h = 0$ за $x = \alpha$ равни. Но исти изрази показую после ясно:

1.) Ако є $n_1 < 1$, онда по првомъ одъ њи, было иначе $n_2 \leqq 2$, $n_2 \leqq 3$, и т. д., постає $f_1(\alpha)$ вида $\frac{a}{0} = \infty$; ако є пакъ $n_1 = 1$, онда слѣдує

$$A_1 = f_1(\alpha).$$

2.) Ако є $n_1 = 1$, и притомъ $n_2 < 2$, остали пакъ изложительи односно $\leqq 3$, $\leqq 4$, и т. д., онда због тога што првый чланъ у другомъ изразу, као нулли равањ

одпада, слѣдує $f_2(\alpha) = \frac{a}{0} = \infty$; напротивъ ако є поредъ $n_1 = 1$ брой $n_2 = 2$, онда быва по истомъ изразу $2\,A_2 = f_2(\alpha)$, тако да є у томъ случаю

$$A_2 = \frac{1}{2!} f_2(\alpha).$$

3.) Ако є $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, и притомъ $n_3 < 3$, а остали изложителѣи односно $\leqq 4$, $\leqq 5$, и т. д.: онда по трећемъ изразу, зато што првый нѣговъ чланъ као нулли равнъ одпада, постає $f_3(\alpha) = \frac{a}{0} = \infty$; ако є пакъ поредъ $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ изложитель $n_3 = 3$, онда добыямо одъ истога израза $3!\,A_3 = f_3(\alpha)$, тако да є тадъ

$$A_3 = \frac{1}{3!} f_3(\alpha).$$

И т. д., и т. д.

Сабираюћа сва ова докученя видимо: ако є у разлици $f(x+h) - f(x)\ f_{n+1}(\alpha)$ првый сачинитель, кои за $x = \alpha$ постає вида $\frac{a}{0} = \infty$; онда су нѣни чланови, до заключно $f_n(\alpha)\ \frac{h^n}{n!}$, сви онаки исти као у телеровомъ образцу, слѣдующій пакъ чланъ садржи деловвный степенъ одъ h, кога изложитель мора лежати између n и $n+1$.

ж.) Маклореновъ образацъ.

§ 32.

Съ намеромъ да развіемо $f(x)$ у редъ по целимъ положнимъ степенима одъ x, поставимо

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots\ldots$$

Определююћи диференціалне количнике ове єдначине налазимо

$$f_1(x) = C_1 + 2\,C_2x + 3\,C_3x^2 + \ldots\ldots$$
$$f_2(x) = 2\,C_2 + 6\,C_3x + \ldots\ldots\ldots$$
$$f_3(x) = 6\,C_3x + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Како пакъ одъ x независни сачинительи у горнѣмъ реду мораю важити при свакой вредности тога броя, то є свеєдно съ коіомъ ћемо ій определити. Найпростіє, безъ сумнѣ, урадит'ћемо то съ $x = 0$. Съ томъ пакъ слѣдує изъ предходећи єдначина'

$$C_0 = f(\underset{0}{x}),\ C_1 = f_1(\underset{0}{x}),\ C_2 = \frac{1}{2}\cdot f_2(\underset{0}{x}),\ C_3 = \frac{1}{6}\cdot f_3(\underset{0}{x}),\ \text{и т. д.,}$$

При чему количницима придата o означує, да є у истима узето $x = 0$.

Поставляюћи дакле ове вредности у горе узетый редъ, имамо

$$f(x) = f(\underset{0}{x}) + f_1(\underset{0}{x})\,x + \frac{1}{2!}\cdot f_2(\underset{0}{x})\,x^2 + \frac{1}{3!}f_3(\underset{0}{x})\,x^3 + \ldots\ (1.,$$

образацъ кои є, по нѣговомъ изнашаоцу, познатъ подъ именомъ **простый Маклореновъ образацъ.**

До истогъ образца долазимо такођеръ, ако у телеровомъ образцу узмемо найпре $x = 0$, а после заменемо h съ x.

Поставляюћи пакъ у телеровомъ образцу найпре $x = \alpha$, а после $x - \alpha$ место h, слѣдує образацъ

$$f(x) = f(\underset{\alpha}{x}) + f_1(\underset{\alpha}{x})\cdot(x-\alpha) + f_2(\underset{\alpha}{x})\cdot\frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \ldots\ (2.,$$

кои се зове **обштій** маклореновъ образацъ, и одъ коєга є онай прећашныій само особитый тай случай, кадъ є $\alpha = 0$.

Ако притомъ кои одъ диференціалны количника' изпадне ∞, онда є то знакъ, да се дотична функція неможе развити у редъ целы положны степена' одъ x.

Употребимо одма тай образацъ на кою функцію.

§ 33.

1.) **Тражи се редъ за** $f(x) = \sin x$.

При той є

$$f(x) = \sin x, \quad \text{дакле} \quad f(\underset{0}{x}) = 0$$

$$f_1(x) = \cos x, \quad \text{„} \quad f_1(\underset{0}{x}) = 1$$

$$f_2(x) = -\sin x, \quad \text{„} \quad f_2(\underset{0}{x}) = 0$$

$$f_3(x) = -\cos x, \quad \text{„} \quad f_3(\underset{0}{x}) = -1$$

$$f_4(x) = \sin x, \quad \text{„} \quad f_4(\underset{0}{x}) = 0$$

$$f_5(x) = \cos x, \quad \text{„} \quad f_5(\underset{0}{x}) = 1$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots,$$

и зато по вопросномъ образцу, $f(x)$, **т. є.**

$$\sin x = x - \frac{x}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots,$$

као дояко већъ неколико пута на другій начинъ.

2.) **Иште се редъ за** $f(x) = lx$.

Ту є

$$f(x) = lx, \quad \text{дакле} \quad f(\underset{0}{x}) = -\infty$$

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{„} \quad f_1(\underset{0}{x}) = \frac{1}{0} = \infty$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad \text{„} \quad f_2(\underset{0}{x}) = -\frac{1}{0} = -\infty$$

$$f_3(x) = \frac{2!}{x^3}, \quad \text{„} \quad f_3(\underset{0}{x}) = \frac{2!}{0} = \infty$$

$$f_4(x) = -\frac{3!}{x^4}, \quad \text{„} \quad f_4(\underset{0}{x}) = -\frac{3!}{0} = -\infty$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots;$$

изъ чега видимо, што већъ знамо, да се lx неможе представити као редъ целы положны степена' одъ x.

3.) Развити $f(x) = \sqrt{1-x}$ у редъ по x.

Ту є

$f(x) = \sqrt{1-x}$ . . . . . , дакле $f(x_0) = 1$

$f_1(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ . . . . , „ $f_1(x_0) = -\frac{1}{2}$

$f_2(x) = -\frac{1.1}{2^2} \cdot \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}}$. , „ $f_2(x_0) = -\frac{1.1}{2^2}$

$f_3(x) = -\frac{1.3}{2^3} \cdot \frac{1}{(1-x)^2\sqrt{1-x}}$, „ $f_3(x_0) = -\frac{1.3}{2^3}$

$f_4(x) = -\frac{1.3.5}{2^4} \cdot \frac{1}{(1-x)^3\sqrt{1-x}}$, „ $f_4(x_0) = -\frac{1.3.5}{2^4}$

. . . . . .

и зато по маклореновомъ образцу

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{1.3}{2^3} \cdot x^3 - \frac{1.3.5}{2^4} \cdot x^4 - \ldots .$$

§ 34.

Ако є првый диференціалный количникъ, за развіянѣ у редъ дате функціє, функція деловна или ирраціонална, онда нѣни выши диференціални количници бываю све сложеніи и незгодніи, и због тога є само развіянѣ такове функціє помоћу телеровогъ или маклореновогъ образца доста неудобно. Олакше пролазимо у таковомъ случаю начиномъ, кои ћемо употребити на слѣдующе примере.

1.) Тражи се редъ за $f(x) = tang\, x$. Поставимо

$$tang\, x = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots .$$

Ако разсудимо да овай изразъ стои за сваку тангенту, а да є $tang\, 0 = 0$, онда увиђамо да у реду тан-

генте нема члана безъ x, т. є. да є $C_0 = 0$, тако да имамо само ставити

$$tang\, x = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots \text{(а.}$$

Узимаюћи диференціале слѣдує, ако съ dx одма скратимо,

$$\frac{1}{cos^2 x} = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots\ldots\ldots \text{(б.}$$

и одтудъ, ако ослободимо одъ именителя,

$$1 = cos^2 x\,(C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots\ldots).$$

Диференціалећи наново, добыямо

$$0 = -2\, sin\, x\, cos\, x\,(C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots\ldots)$$
$$+ cos^2 x\,(2C_2 + 6C_3 x + 12C_4 x^2 + \ldots\ldots\ldots),$$

или ако скратимо съ $cos\, x$,

$$0 = -2\, sin\, x\,(C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots\ldots)$$
$$+ cos\, x\,(2C_2 + 6C_3 x + 12C_4 x^2 + \ldots\ldots).$$

Овде садъ место $sin\, x$ и $cos\, x$ њиове редове узимаюћи, после мложеня свршуюћи и найпосле скраћуюћи слѣдує

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l} 2C_2 + 6C_3 & x + 12C_4 & x^2 + 20C_5 & x^3 + 30C_6 & x^4 + 42C_7 & x^5 + \ldots\ldots = 0, \\ -2C_1 & -5C_2 & -9C_3 & -14C_4 & -20C_5 & \\ & & +\frac{1}{3}C_1 & +\frac{3}{4}C_2 & +\frac{5}{4}C_3 & \\ & & & & -\frac{1}{60}C_1 & \end{array}$$

и одтудъ

$2C_2 = 0$, ... дакле $C_2 = 0$

$6C_3 - 2C_1 = 0$, ... „ $C_3 = \frac{1}{3}C_1$

$12C_4 - 5C_2 = 0$, ... „ $C_4 = 0$

$20C_5 - 9C_3 + \frac{1}{3}C_1 = 0$, ... дакле $C_5 = \frac{2}{15}C_1$

$30C_6 - 14C_4 + \frac{3}{4}C_2 = 0$, ... „ $C_6 = 0$

$42C_7 - 20C_5 + \frac{5}{4}C_3 - \frac{1}{60}C_1 = 0$ . . . . „ $C_7 = \frac{136}{2520}C_1$

и т. д.; а ако ове вредности метнемо у єдначину б.) и после поставимо $x = 0$, налазимо

$$\frac{1}{cos^2 0} = \frac{1}{1} = 1 = C_1.$$

Све те вредносли пакъ найпосле узете у єдначину а.), даю

$$tang\, x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{136}{2520}x^7 + \ldots\ldots,$$

каогодъ што смо нашли у I. Ч. § 164.

2.) Тражи се редъ за $f(x) = arc\,(tang = x)$.

Метнимо

$$arc\,(tang = x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \ldots\ldots$$

Узимаюћи дифереңціале добыямо

$$\frac{1}{1+x^2} = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \ldots\ldots\ldots,$$

или збогъ

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots\ldots,$$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \ldots\ldots,$$

и одтудъ по правилу сачинителя'

$$C_1 = 1,\ C_2 = 0,\ C_3 = -\frac{1}{3},\ C_4 = 0,\ C_5 = \frac{1}{5}, \ldots\ldots;$$

слѣдователно ако ове вредности поставимо у узетый редъ:

$$arc\,(tang = x) = C_0 + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots\ldots,$$

а ако се нато обазремо, да є за $x=0$ и $arc\,(tang=0)=0$, па зато и $C_0=0$:

$$arc\,(tang=x)=x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7+\ldots\ldots$$

§ 35.

Завршуюћи овай предметъ да развіемо овимъ истимъ начиномъ іошъ єдну функцію, коя истина неспада у функціє споменуте у пређашнѣмъ §-у, али истый начинъ веѣма обяснява.

Иште се редъ за

$$f(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots)^n.$$

Поставимо

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a^3x^3+\ldots.)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ldots.$$

Узимаюћи найпре логаритме добыямо

$$nl(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)=l(C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ldots);$$

ово пакъ диференціалеѣи слѣдує

$$\frac{n(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots)}{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots}=\frac{C_1+2Cx+3C_3x^2+\ldots}{C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots},$$

и одтудъ, ако одъ именителя ослободимо

$$\begin{array}{l|l|l|l}
na_1C_0+na_1C_1 & x+na_1C_2 & x^2+na_1C_3 & x^3+\ldots\ldots\ldots \\
\quad 2na_2C_0 & \quad 2na_2C_1 & \quad 2na_2C_2 & \\
 & \quad 3na_3C_0 & \quad 3na_3C_1 & \\
 & & \quad 4na_4C_0 &
\end{array}$$

$$=\begin{array}{l|l|l|l}
a_0C_1+2a_0C_2 & x+3a_0C_3 & x^2+4a_0C_4 & x^4+\ldots\ldots; \\
\quad a_1C_1 & \quad 2a_1C_2 & \quad 3a_1C_3 & \\
 & \quad a_2C_1 & \quad 2a_2C_2 & \\
 & & \quad a_3C_1 &
\end{array}$$

а одатле опетъ по правилу сачинителя'

$a_0 C_1 = n a_1 C_0$, ... дакле $C_1 = n \frac{a_1}{a_0} C_0$,

$2a_0 C_2 + a_1 C_1 = n a_1 C_1 + 2n a_2 C_0$, . . „ $C_2 = \binom{n}{2} \frac{a_1^2}{a_0^2} C_0 + n \frac{a_2}{a_0} C_0$,

$3a_0 C_3 + 2a_1 C_2 + a_2 C_1 = n a_1 C_2 + 2n a_2 C_1$

$+ 3n a_3 C_0$, дакле $C_2 = \binom{n}{3} \frac{a_1^3}{a_0^3} C_0 + n^{2|-1} \cdot \frac{a_2 a_1}{a_0^2} C_0$

$+ n \frac{a_3}{a_0} C_0$,

и т. д.

Узимаюћи садъ све ове вредности у горню єдначину а.) слѣдує

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^n = C_0 + \binom{n}{1} \frac{a_1}{a_0} C_0 x + \left[\binom{n}{2} \frac{a_1^2}{a_0^2} + n \frac{a_2}{a_0}\right] C_0 x^2$$

$$+ \left[\binom{n}{3} \cdot \frac{a_1^3}{a_0^3} + n^{2|-1} \cdot \frac{a_2 a_1}{a_0^2} + n \frac{a_2}{a_0}\right] C_0 x^3 + \ldots\ldots\ldots;$$

Ако се пакъ обазремо нато, да овай изразъ мора важити за сваку вредность одъ x, па и за $x = 0$, а за то x слѣдує $C_0 = a_0^n$: имамо коначно

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^n = a_0^n + n a_0^{n-1} a_1 x + \left[n a_0^{n-1} a_2 + \binom{n}{2} a_0^{n-2} a_1^2\right] x^2 +$$

$$+ \ldots\ldots,$$

т. є. полиномный образацъ, каошто смо га нашли на другій начинъ у I. Ч. § 20.

Б. Диференціаленѣ функція више пременльивы броєва.

§ 36.

Сваку функцію $v = f(x, y)$ два, међу собомъ независна пременльива броя x и y, можемо на троякій начинъ съ изчезльиво малимъ прираштаима пременъивати; т. є.

1.) ако у њой само x променимо у $x + dx$, или ако 2.) само y променимо у $y + dy$, или ако најпосле 3.) у истый махъ x променимо у $x + dx$ а y у $y + dy$.

У првомъ случаю быт'ће њена изчезльиво мала промена, т. є. њенъ диференціалъ,

$$dv = f(x + dx, y) - f(x, y),$$ у другомъ

$$dv = f(x, y + dy) - f(x, y),$$ а у последњему

$$dv = f(x + dx, y + dy) - f(x, y).$$

Прва два диференціала вопросне функціе v, т. є. они при коима се само єданъ променльивый брой меня, а другій остає сталанъ, — зову се **почастни или парціални** њени диференціали, првый **почастный по** x, а другій **почастный по** y.

Диференціалъ пакъ исте функціе v у трећемъ случаю, т. є. кадъ се оба променльива броя меняю, зове се **целый или тоталный** њенъ диференціалъ.

Да бы знали да ли є диференціалъ функціе $v = f(x, y)$ два променльива броя x и y почастанъ или цео, и у првомъ случаю по коме одъ та два броя узетъ: означит'ћемо одяко целый диференціалъ просто съ dv или $df(x, y)$, почастне диференціале пакъ односно съ dv_x, dv_y или $df(x, y)_x$, $df(x, y)_y$.

§ 37.

У § 214. I. Ч. видили смо, да се $f(x + h, y + k)$ може свагда развити у редъ вида

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + (Mh + Nk) + \frac{1}{2}(Qh^2 + 2PQhk + Rk^2) + \ldots\ldots,$$

при чему $M, N, O, P, \ldots$ представляю неке крайне функціе одъ x и y.

Ако изъ те єдначине определимо разлику $f(x + h, y + k) - f(x, y)$, и после место h узмемо dx, а место k

dy, изчезаваю у десной части те разлике сви други чланови спрамъ првога, као изчезльиво мали броеви выши редова, и остає $f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$, т. є. **целый диференціалъ** функціе v,

$$dv = M\,dx + N\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \text{(1.,}$$

при чему M и N єсу неке крайне функціе оба променльива броя x и y.

Узимаюћи у овомъ изразу да є y сталанъ брой, быт'ће, збогъ $dy = 0$, $dv = M\,dx$. Но то тадъ ніе ништа друго, него почастный диференціалъ функціе v по x, и зато можемо писати

$$dv_x = M\,dx, \text{ а } M = f_1(x,y)_x.$$

Исто тако быт'ће, ако у истомъ изразу 1. сматрамо x као сталанъ брой, $dx = 0$, и збогъ тога $dv = N\,dy$, коє опетъ ніе ништа друго, но почастный диференціалъ функціе v по y, тако да у томъ случаю можемо ставити.

$$dv_y = N\,dy, \text{ а } N = f_1(x,y)_y.$$

По обоєму стои дакле

$dv = dv_x + dv_y$, или $dv = f_1(x,y)_x.dx + f_1(x,y)_y.dy \ldots\ldots \text{(2.,}$

т. є. **целый диференціалъ функціе** $v = f(x,y)$ **два променльива броя** x **и** y, **равань є сбиру нћны почастны диференціала.**

Да се пакъ ово може разпрострети и на функціе више променльивы броева него два, увиђа се по себи.

§ 38.

Ова два §а показую довольно, да за диференціаленћ функція више променльивы броева, осимъ савршенога познаваня свію показаны правила за диференціале функція єдногъ променльивогъ броя, и онога што смо у истимъ §§ма дознали, — далћ ништа више непотребуємо, до єдногъ само іошъ упражняваня, поредъ приметбе, да

є опредељиванѣ целогъ диференціала помоћу почастны, у млогомъ случаю удобніе одъ непосреднога, ако због ничега другога, а оно зато што на првый начинъ изнаћеный целый диференціалъ добыямо одма уређена по диференціалима пременљивы броєва, коє є млого пута башъ потребно.

Садъ узмимо кои примеръ.

§ 39.

1.) Тражи се целый диференціалъ функціе $v = \sin x \cos y$.

Ту є $dv_x = \cos x \cos y\, dx$, $dv_y = -\sin x \sin y\, dy$, дакле

$$dv = dv_x + dv_y = \cos x \cos y\, dx - \sin x \sin y\, dy.$$

2.) Потребанъ є целый диференціалъ функціе $v = \frac{x^2}{\sqrt{x-y}}$

Ту є

$$dv_x = \frac{2x\sqrt{x-y} - \frac{x^2}{2\sqrt{x-y}}}{x-y}\, dx = \frac{4x(x-y) - x^2}{2(x-y)\sqrt{x-y}}\, dx$$

$$= \frac{3x^2 - 4xy}{2(x-y)\sqrt{x-y}}\, dx,$$

$$dv_y = \frac{x^2}{2(x-y)\sqrt{x-y}}\, dy;$$ дакле

$$dv = dv_x + dv_y = \frac{3x^2 - 4xy}{2(x-y)\sqrt{x-y}}\, dx + \frac{x^2}{2(x-y)\sqrt{x-y}}\, dy$$

$$= \frac{(3x^2 - 4xy)\, dx + x^2 . dy}{2(x-y)\sqrt{x-y}}.$$

3.) Ише се диференціалъ функціе $v = y^x$.

При той є $dv_x = y^x ly \,.\, dx$, а $dv_y = xy^{x-1} . dy$;

дакле целый диференціалъ

$$dv = dv_x + dv_y = y^x ly \,.\, dx + xy^{x-1} . dy.$$

4.) Нуждань є целый диференціалъ функціе

$$v = \frac{x\,ly - \sin x \,.\, l \sin y}{y\,lx - \sin y \,.\, l \sin x}.$$

Ту имамо

$$dv_x = \frac{\left[(y\,lx - \sin y \,.\, l \sin x)\,(ly - \cos x \,.\, l \sin y)\,dx - (x\,ly - \sin x \,.\, l \sin y)\left(\frac{y}{x} - \sin y \cot x\right)\right]}{(y\,lx - \sin y \,.\, l \sin x)^2}$$

$$dv_y = \frac{\left[(y\,lx - \sin y \,.\, l \sin x)\left(\frac{x}{y} - \sin x \,.\, \cot y\right) - (x\,ly - \sin x \,.\, l \sin y)\,.\,(lx - \cos y \,.\, l \sin x)\right]}{(y\,lx - \sin y \,.\, l \sin x)^2}\,dy;$$

дакле $dv = dv_x + dv_y$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{l} (ylx - \sin y \,.\, l \sin x)\left[(ly - \cos x \,.\, l \sin y)\,dx + \left(\frac{x}{y} - \sin x \cot y\right)dy\right] \\ -(xly - \sin x \,.\, l \sin y)\,.\left[\left(\frac{y}{x} - \sin y \cot x\right)dx + (lx - \cos y \,.\, l \sin x)\,dy\right] \end{array} \right\}}{(y\,lx - \sin y \,.\, l \sin x)^2}$$

Найпосле

5.) Тражи се целый диференціалъ функціе $v = x \sin (ylz)$

При той имамо $dv_x = \sin (y\,lz) \,.\, dx$,

$dv_y = x \cos (y\,lz) \,.\, lz \,.\, dy$,

$dv_z = x \cos (ylz) \,.\, y \,.\, \frac{dz}{z}$; дакле траженый целый диференціалъ

$$dv = \sin (ylz) \,.\, dx + xlz \,.\, \cos (ylz) \,.\, dy + \frac{xy}{z} \,.\, \cos (yl\,z) \,.\, dz$$

б.) Айлерово правило за єдностепене функціе.

§ 40.

Ако є $v = f(x, y) = Ax^a y^\alpha + Bx^b y^\beta + Cx^c x^\gamma + \ldots$,

и притомъ $a + \alpha = b + \beta = c + \gamma = \ldots = n$, т. є. ако

є функція v једностепена (хомогена) n. реда, одъ два пременљива броя x и y, и мы определимо нѣне почастне диференціалне количнике: добыямо

$$f_1(x, y)_x = Aax^{a-1}.y^a + Bbx^{b-1}.y^\beta + Ccx^{c-1}.y^\gamma + \ldots\ldots$$

$$f_1(x, y)_y = A\alpha x^a.y^{\alpha-1} + B\beta x^b y^{\beta-1} + C\gamma x^c.y^{\gamma-1} + \ldots\ldots$$

Множећи првый количникъ съ x а другій съ y, и после производе сабираюћи, слѣдує

$$f_1(x, y)_x \cdot x + f_1(x, y)_y \cdot y$$

$$= A(a+\alpha)x^a y^\alpha + B(b+\beta)x^b y^\beta + C(c+\gamma)x^c y^\gamma + \ldots$$

$$= n(Ax^a y^\alpha + Bx^b y^\beta + Cx^c y^\gamma + \ldots\ldots), \text{ т. є.}$$

$$f_1(x, y)_x \cdot x + f_1(x, y)_y \cdot y = nv.$$

Овай важный образацъ зове се Айлерово правило за једностепене функціе, и служи осимъ другога за испытиванѣ точности целога диференціала функціе два пременљива броя, определѣногъ помоћу почастны диференціала; лако є пакъ разпростреги га на једностепене функціе и произвольно колико више пременљивы броева.

Изъ горньи израза видимо уједно, да су почастни диференціални количници једностепене функціе опетъ такове функціе, но једногъ реда ниже.

За подпуно уверенѣ о истинитости вопроснога правила, ево и једанъ примеръ.

§ 41.

Имамо једностепену функцію 2. реда одъ три пременљива броя x, y и z,

$$v = f(x, y, z) = 2x^2 + xy - 3yz + \frac{z^4}{x^2} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{z}.$$

При той є

$$f_1(x,y,z)_x = 4x + y - 2\frac{z^4}{x^3},$$

$$f_1(x,y,z)_y = x - 3z - \frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{z},$$

$$f_1(x,y,z)_z = -3y + 4\frac{z^3}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{z^2};$$ дакле

$$f_1(x,y,z)_x \cdot x + f_1(x,y,z)_y \cdot y + f_1(x,y,z)_z \cdot z =$$

$$= 4x^2 + 2xy + 2\frac{z^4}{x^2} - 6yz - \frac{y^3}{z}$$

$$= 2\left(2x^2 + xy + \frac{z^4}{x^2} - 3yz - \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{d}\right),$$

т. є. доиста $= 2v$.

Само іошъ валя приметити, да исто правило постои іошъ и у томъ случаю, ако се у комъ члану вопросне єдностепене функціє налази какавъ трансценденттный чинитель нулногъ степена. Н. п. и при функціи $v = f(x,y) = x^2 - y^2 \sin\frac{x}{y} + 2xy$, у коіой є $\frac{x}{y}$ нулнога степена, каошто ћемо одма видити.

$$f_1(x,y)_x = 2x - y\cos\frac{x}{y} + 2y,$$

$$f_1(x,y)_y = -2y\sin\frac{x}{y} + x\cos\frac{x}{y} + 2x;$$ дакле

$$f_1(x,y)_x \cdot x + f_1(x,y)_y \cdot y = 2x^2 + 4xy - 2y^2\sin\frac{x}{y}$$

$$= 2\left(x^2 + 2xy - y^2\sin\frac{x}{y}\right),$$ доиста

$$= 2v.$$

в.) Выши диференціали функція више пременљивы броєва.

§ 42.

Све што є речено за выше диференціале функція єдногъ пременљивогъ броя, постои и за функціе више пременљивы броєва. Ако є т. є. за $v = f(x,y)$, $dv = Mdx + Ndy$, при чему M и N, каошто смо видили у §-у 17., представляю опетъ неке функціе одъ x и y: онда можемо dv, т. є. $Mdx + Ndy$ опетъ диференціалити, тако да притомъ сматрамо dx и dy као сталне броєве, или єданъ одъ ньи као пременљивъ а онай другій сталанъ, или найпосле оба као пременљиве броєве.

За сва слѣдующа сматраня выши диференціала уричемо овде єданпутъ за свагда dx и dy као сталне броєве.

При томъ предпостављѣню быт'ће подпуный

$$^2dv = d.dv = dMdx + dNdy.$$

$$= dx.dM + dy.dN \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha$$

или $$^2dv = dx.df_1(x,y)_x + dy.df_1(x,y)_y$$

$$= dx.[f_2(x,y).dx + f_2(x,y)_{x,y}.dy] + dy.[f_2(x,y).dx + f_2(x,y)_y.dy]$$

$$= f_2(x,y)_x.d^2x + [f_2(x,y)_{x,y} + f_2(x,y)_{y,x}]\,dx\,dy + f_2(x,y)_y.d^2y$$

$$= {}^2dv_x + ({}^2dv_{x,y} + {}^2dv_{y,x}) + {}^2dv_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta.$$

Другій диференціалъ функціе v можеао дакле добыти или непосредно по образцу α.), или помоћу почастногъ диференціаленя по образцу β.) Тако н. п. кадъ бы се тражіо другій диференціалъ функціе $v = \sin x \cos y$, имали бы, збогъ

$$dv = \cos x \cos y\, dx - \sin x \sin y\, dy,$$

непосреднимъ диференціаленѣмъ

$$^2dv = dx \,.\, d\cos x \cos y - dy \,.\, d \sin x \sin y$$

$$= dx \,.\, (-\sin x \cos y\, dx - \cos x \sin y\, dy)$$

$$- dy \,.\, (\cos x \sin y\, dx + \sin x \cos y\, dy)$$

$$= -\sin x \cos y \,.\, d^2x - 2 \cos x \sin y \,.\, dx\, dy - \sin x \cos y \,.\, d^2y);$$

помоћу ночастны диференціала пакъ, збогъ

$$dv_x = \cos x \cos y\, dx,\ dv_y = -\sin x \sin y\, dy \quad (\S\ 39.),$$

$$^2dv_x = -\sin x \cos y\, d^2x,\ ^2dv_{x,y} = -\sin y \cos x\, dx\, dy,$$

$$^2dv_{y,x} = -\cos x \sin y\, dy\, dx,\ ^2dv_y = -\sin x \cos y\, d^2y,$$

дакле по обр. β.)

$$^2dv = -\sin x \cos y \,.\, d^2x - 2 \cos x \sin y \,.\, dx\, dy - \sin x \cos y \,.\, d^2y.$$

г.) Телеровъ и маклореновъ образацъ за функціе два пременльива броя.

§ 43.

Нека є $f(x,y)$ уобште нека функція два међу собомъ независна пременљива броя x и y.

Поставляюћи у истой $x+h$ место x, быће по телеровомъ образцу за функціе єдногъ пременљивогъ броя, ако нову функцію означимо съ $\varphi(x,y)$:

$$\varphi(x,y) = f(x,y) + f_1(x,y)_x \cdot h + f_2(x,y)_x \cdot \frac{h^2}{2!} + f_3(x,y)_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \ldots.$$

Узимаюћи овде пакъ $y+k$ место y, и означуюћи нову функцію съ $\psi(x,y)$, добыямо по истомъ правилу

$$\psi(x,y) = \varphi(x,y) + \varphi_1(x,y)_y \cdot k + \varphi_2(x,y)_y \cdot \frac{k^2}{2!} + \varphi_3(x,y)_y \cdot \frac{k^3}{3!} + \cdots$$

Како є пакъ

$$\varphi_1(x,y)_y = f_1(x,y)_y + f_2(x,y)_{x,y} \cdot h + f_3(x,y)_{2x,y} \cdot \frac{h^2}{2!} + f_4(x,y)_{3x,y} \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots\cdots$$

$$\varphi_2(x,y)_y = f_2(x,y)_y + f_3(x,y)_{x,2y} \cdot h + f_4(x,y)_{2x,2y} \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots\cdots$$

$$\varphi_1(x,y)_y = f_3(x,y)_y + f_4(x,y)_{x,3y} \cdot h + f_5(x,y)_{2x,3y} \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

то є, ове вредности у $\psi(x,y)$ узимаюħи, ова функція, т. є.

$$f(x+h,y+k) = f(x,y)$$
$$+ [f_1(x,y)_x \cdot h + f_1(x,y)_y \cdot k]$$
$$+ \frac{1}{2!}[f_2(x,y)_x \cdot h^2 + 2f_2(x,y)_{x,y} \cdot hk + f_2(x,y)_y \cdot k^2]$$
$$+ \frac{1}{3!}[f_3(x,y)_x \cdot h^3 + 3f_3(x,y)_{2x,y} \cdot h^2k$$
$$+ 3f_3(x,y)_{x,2y} \cdot hk^2 + f_3(x,y)_y k^3]$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

а то є телеровъ образацъ за функціе два пременљива броя, кои пре свега служи за опредељиванħ премене такове функціе, због еднодобне премене пременљивы броева у $x+h$ и $y+k$.

§ 44.

Поставляюħи у томъ образцу $x=0$ и $y=0$, и узимаюħи после x место h а y место k, добыямо образацъ

$$f(x,y)=f(\underset{0}{x,y})+[f_1(\underset{0}{x,y})_x\cdot x+f_1(\underset{0}{x,y})_y\cdot y]$$

$$+\frac{1}{2!}[f_2(\underset{0}{x,y})_x\cdot x^2+2f_2(\underset{0}{x,y})_{x,y}\cdot xy+f_2(\underset{0}{x,y})_y\cdot y^2$$

$$+\frac{1}{3!}[f_3(\underset{0}{x,y})_x\cdot x^3+3f_3(\underset{0}{x,y})_{2x,y}\cdot x^2y+3f_3(\underset{0}{x,y})_{x,2y}\cdot$$

$$xy^2+f_3(\underset{0}{x,y})_y\cdot y^3]$$

$$+\ .$$

у комъ, диференціалнимъ количницима придата о показує, да є у истима узето $x=0$ и $y=0$, и кои служи за развіянѣ функціє два пременљива броя по степенима исты броєва.

Ово очевидно ніє ништа друго, но маклореновъ образацъ за функціє два пременљива броя.

Служећи се тимъ образцемъ за развіянѣ н. п. функціє $f(x,y)=xya^{x+y}$ у редъ имамо

$$f(\underset{0}{x,y})=0,$$

$f_1(x,y)_x=ya^{x+y}.(1+x\,la)$,	**зато**	$f_1(\underset{0}{x,y})_x=0$,
$f_1(x,y)_y=xa^{x+y}.(1+y\,la)$,	„	$f_1(\underset{0}{x,y})_y=0$,
$f_2(\underset{0}{x,y})_x=ya^{x+y}.la\,(2+x\,la)$,	„	$f_2(\underset{0}{x,y})_x=0$,
$f_2(\underset{0}{x,y})_y=xa^{x+y}.la\,(2+y\,la)$,	„	$f_2(\underset{0}{x,y})_y=0$,
$f_2(\underset{0}{x,y})_{x,y}=(1+x\,la)(1+y\,la)a^{x+y}$,	„	$f_2(\underset{0}{x,y})_{x,y}=1$,
$f_3(\underset{0}{x,y})_x=yl^2aa^{x+y}.(3+x\,la)$,	„	$f_3(\underset{0}{x,y})_x=0$,
$f_3(\underset{0}{x,y})_y=xl^2a\,.\,a^{x+y}.(3+y\,la)$,	„	$f_3(\underset{0}{x,y})_y=0$,
$f_3(\underset{0}{x,y})_{2x,y}=la.a^{x+y}.(2+xla)(1+yla)$	„	$f_3(\underset{0}{x,y})_{2x,y}=2\,la$,
$f_3(\underset{0}{x,y})_{x,2y}=la.a^{x+y}.(2+y\,la)(1+x\,la)$,	„	$f_3(\underset{0}{x,y})_{x,2y}=2\,la$,

. . . . . .

и одтудъ видимо лако, да за сачинителѣ вопроснога реда само одъ мешовиты диференціалны количника дате функціе нешто добыямо, а да чисти диференціални количници испадаю сви $= 0$. Пренебрегаваюћи дакле ове при далѣмъ послу, имамо іошъ

$f_4(x,y)_{3x,y} = l^2a.a^{x+y}.(3+xla)(1+yla)$, зато $f_4(\underset{0}{x,y})_{3x,y} = 3l^2a$,

$f_4(x,y)_{x,3y} = l^2a.a^{x+y}.(3+yla)(1+xla)$, „ $f_4(\underset{0}{x,y})_{x,3y} = 3l^2a$,

$f_4(x,y)_{2x,2y} = l^2a.a^{x+y}.(2+xla)(2+yla)$, „ $f_4(\underset{0}{x,y})_{2x,2y} = 4l^2a$,

и т. д.

Слѣдователно траженый по горнѣмъ образцу редъ

$$xy\,a^{x+y} = \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{3}lax^2y + \tfrac{1}{3}laxy^2 + \tfrac{1}{8}l^2ax^3y + \tfrac{1}{6}l^2ax^2y^2 + \tfrac{1}{8}l^2axy^3$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Ову функцію xya^{x+y} можемо писати и овако: xya^xa^y. Нѣнъ редъ дакле добыли бы просто, т. в. безъ употребленя маклореновогъ образца, ако бы за a^x и a^y узели ньиове редове, и те међу собомъ, а ньиовъ производъ после съ xy помножили. Тай посао оставлямо прилѣжномъ почетнику.

§ 45.

Ако узмемо у функціи $f(x,y)$ § 43. найпре $y+k$ место y, а у новой функціи после $x+h$ место x, добыямо на истый начинъ као тамо,

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + [f_1(x,y)_yk + f_1(x,y)_xh]$$
$$+ \tfrac{1}{2!}[f_2(x,y)_yk^2 + 2f_2(x,y)_{y,x}.kh + f_2(x,y)_x.h^2]$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Уєдначаваюћи пакъ овай изразъ $f(x+h,y+k)$ съ онимъ у поменутомъ §, слѣдує по правилу сачинителя

$$f_2(x,y)_{x,y} = f_2(x,y)_{y,x},\ f_3(x,y)_{2x,y} = f_3(x,y)_{y,2x},$$

и т. д., уобште

$$f_{\alpha+\beta}(x,y)_{\alpha x,\beta y} = f_{\alpha+\beta}(x,y)_{\beta y,\alpha x},$$

изъ чега видимо, да є сасвимъ свеедно, хоћемо ли неку функцію два променљива броя x и y найпре α пута по x на онда β пута по y диференціалити, или пакъ найпре β пута по y а после α пута по x. Ево у томъ обзиру и єданъ примеръ.

По §. 42. є за $f(x,y) = \sin x \cos y$,

$$f_2(x,y)_x = -\sin x \cos y.$$

Диференціалећи ово наново по y, добыямо

$$f_3(x,y)_{2x,y} = \sin x \sin y.$$

По § 39. пакъ имамо

$f_1(x,y)_y = -\sin x \sin y$; дакле ако ово застопце двапутъ диференціалимо по x,

$f_3(x,y)_{y,2x} = \sin x \sin y$, и тако доиста оно што пре.

§ 46.

По § 35. бр. 2.), стои за $v = f(x,y)$

$$dv = f_1(x,y)_x . dx + f_1(x,y)_y . dy$$
$$= M\,dx + N\,dy$$

Диференціалећи M по y, N пакъ по x, добыямо

$$\frac{dM_y}{dy} = f_2(x,y)_{x,y}, \text{ а } \frac{dN_x}{dx} = f_2(x,y)_{y,x}.$$

Но по пређашнѣмъ є §у $f_2(x,y)_{x,y} = f_2(x,y)_{y,x}$; мора дакле быти при функціама два променљива броя x и y,

$$\frac{dM_y}{dy} = \frac{dN_x}{dx}.$$

Ово докученѣ служи за увераванѣ о точности изнаѣеногъ целогъ диференціала какве функціе два променльива броя x и y, или као то датогъ каквогъ израза, састои се пакъ у томъ, да сачинителя одъ dx диференціалимо по y, а сачинителя одъ dy по x, па онда видимо да ли су диференціални количници одтудъ єднаки, каошто по томъ докученю мораю быти, ако є добывеный или датый диференціалъ добаръ.

Тако н. п.

1.) нашли смо у § 39. као целый диференціалъ функціе $v = y^x$

$$dv = y^x ly \,.\, dx + xy^{x-1} \,.\, dy.$$

При тому є $M = y^x ly$, а $N = xy^{x-1}$.

Диференціалеѣи M по y, добыямо количникъ

$$\frac{dM_y}{dy} = ly \,.\, xy^{x-1} + \frac{y^x}{y} = y^{x-1} \,.\, (x\,ly + 1).$$

Узимаюѣи пакъ диференціалъ одъ N по x, слѣдуе количникъ

$$\frac{dN_x}{dx} = y^{x-1} + yx^{x-1} \,.\, ly = y^{x-1} \,.\, (1 + xly).$$

Овай є колитникъ очевидно онакавъ истый као преѣашньій, и по тому, на основу горнѣга докученя, у поменутомъ §-у наѣеный диференціалъ вопросне функціе исправанъ. — Или

2.) Датъ є изразъ $a^x ly \,.\, dx + yl\,sin\,x \,.\, dy$ као целый диференціалъ неке функціе v два променльива броя x и y, па се пыта да ли є тай диференціалъ исправанъ.

При тому имамо $M = a^x ly$, а $N = yl\,sin\,x$.

Диференціалеѣи M по y, а N по x, добыямо количнике

$$\frac{dM_y}{dy} = \frac{a^x}{ly} \text{ и } \frac{dN_x}{dx} = y\,cot\,x\,,$$

два различна броя, због чега по горњемъ докученю датый изразъ неможе быти целый диференціалъ никакове функціе два пременљива броя x и y.

§ 47.

У предходећемъ §-у нађено условіе за точность логаритма диференціала функціе два пременљива броя, може се лако разпростретн и на функціе више пременљивы броєва. Показаћемо то само іошъ за функціе три пременљива броя.

Нека є $v = f(x, y, z)$ уобште такова нека функція.

По § 37. имамо за такову функцію

$$dv = M.dx + N.dy + O.dz,$$

при чему є

$$M = f_1(x, y, z)_x,\ N = f_1(x, y, z)_y,\ O = f_1(x, y, z)_z.$$

Диференціалећи M єданпутъ по y другипудъ по z, N єданпутъ по x другипутъ по z, O єданпутъ по x другипутъ по y, — добыямо количнике

$$\frac{dM_y}{dy} = f_2(x, y, z)_{x,y} \text{ и } \frac{dM_z}{dz} = f_2(x, y, z)_{x,z},$$

$$\frac{dN_x}{dx} = f_2(x, y, z)_{y,x} \text{ и } \frac{dN_z}{dz} = f_2(x, y, z)_{y,z},$$

$$\frac{dO_x}{dx} = f_2(x, y, z)_{y,x} \text{ и } \frac{dO_y}{dy} = f_2(x, y, z)_{y,z}.$$

Но по § 45. є

$$f_2(x, y, z)_{x,y} = f_2(x, y, z)_{y,x},\ f_2(x, y, z)_{x,z} = f_2(x, y, z)_{z,x},$$

$$f_2(x, y, z)_{y,z} = f_2(x, y, z)_{z,y}.$$

Слѣдователно мора быти при свакой функціи три пременљива броя x, y и z,

$$\frac{dM_y}{dy} = \frac{dN_x}{dx},\ \frac{dM_z}{dz} = \frac{dO_x}{dx},\ \frac{dN_z}{dz} = \frac{dO_y}{dy}.$$

д.) Диференціаленѣ скривены функція.

§ 48.

Све што смо дояко показали, тицало се само одкривены функція; сада пакъ да видимо іошъ и како се диференціале функціє скривене, т. є. функціє вида

$$f(x, y, z, \ldots) = 0.$$

Пре свега сматраймо такове функціє одъ само два променльива броя, представляюћи ій са $f(x, y) = 0$, предпоставляюћи пакъ, да є притомъ x независно, а y зависно променльивый брой, дакле да є y нека функція одъ x.

Нека є премена одъ y због премене одъ x у $x + h$, $y + k$; быт'ће због тога што $f(x, y) = 0$ постои при свакой вредности одъ x, такођеръ и $f(x + h, y + k) = 0$, па ако одъ ове єдначине прву одузмемо, и $f(x+h, y+k) - f(x, y) = 0$, т. є. $\Delta f(x, y) = 0$; дакле найпосле ако узмемо $h = dx$ а $k = dy$, и

$$df(x, y) = 0,$$

то ће рећи: **диференціалъ сваке скривене функціє два променльива броя равanъ є нулли.**

Но по § є 37.

$$df(x, y) = f_1(x, y)_x . dx + f_1(x, y)_y . dy,$$

при чему є y сматрано као независно одъ x. Зато ако ову вредность узмемо у прећашньій изразъ, стои

$$\left.\begin{aligned} df(x, y) = f_1(x, y)_x . dx + f_1(x, y)_y . dy = 0 \\ \text{и одтудъ} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{f_1(x, y)_x}{f_1(x, y)_y} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(I.}$$

Изъ тога пакъ видимо, да ћемо прьый диференціалный количникъ у изразу $f(x, y) = 0$ скривене функціє y одъ x добыти, ако $f(x, y)$ тако диференціалимо,

као да y независи одъ x, на онда тай диференціалъ метнемо $= 0$, и одтудъ определимо $\frac{dy}{dx}$.

Имамо н. п. скривену функцію y у

$$f(x, y) = x^2 - 3xly + y^2 \sin x + a = 0.$$

Диференціалећи ово као да y независи одъ x, налазимо

$$(2x - 3ly + y^2 \cos x)dx - (3\frac{x}{y} - 2y \sin x)dy = 0,$$

одкуда слѣдує

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3ly + y^2 \cos x}{3\frac{x}{y} - 2y \sin x} = \frac{2xy - 3yly + y^3 \cos x}{3x - 2y^2 \sin x}.$$

§ 49.

Диференціалећи $df(x, y) = 0$ наново, слѣдує изъ прве єдначине подъ 1.) у прећашнѣмъ §у, на истимъ основима и съ приметбомъ, да є притомъ dx сталанъ брой, dy пакъ због $y = \varphi(x)$ променльивъ:

$$\begin{aligned} {}^2df(x, y) &= dx \cdot [f_2(x, y)_x\, dx + f_2(x, y)_{x,y} \cdot dy] \\ &\quad + dy \cdot [f_2(x, y)_{y,x} \cdot dx + f_2(x, y)_y \cdot dy] \\ &\quad + f_1(x, y)_y \cdot {}^2dy \\ &= f_2(x, y)_x \cdot d^2x + 2f_2(x, y)_{x,y} dx\, dy + f_2(x, y)_y \cdot d^2y \\ &\quad + f_1(x, y)_y \cdot {}^2dy = 0, \quad \text{и одтудъ} \end{aligned}$$

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = -\frac{f_2(x, y)_x + {}^2f_2(x, y)_{x,y} \cdot \frac{dy}{dx} + f_2(x, y)_y \cdot \frac{d^2y}{d^2x}}{f_1(x, y)_y}.$$

Подобнимъ начиномъ можемо садъ лако изнаћи и друге выше диференціале и диференціалне количнике скривене функціе.

У примеру пређашњгъ §а имали смо

$$f_1(x,y)_x = 2x - 3ly + y^2\cos x,\ f_1(x,y)_y = -3\frac{x}{y} + 2y\sin x.$$

Образуюћи за тай примеръ све што треба у име другогъ диференціалногъ количника скривене функціе y, имамо

$$f_2(x,y)_x = 2 - y^2\sin x,$$

$$f_2(x,y)_{x,y} = -\frac{3}{y} + 2y\cos x,$$

$$f_2(x,y)_y = 3\frac{x}{y^2} + 2\sin x;$$

дакле обзиромъ нато, да є притомъ по пређашњмъ §у

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy - 3yly + y^2\cos x}{3x - 2y^2\sin x},$$

$$\frac{d^2y}{d^2y} = -\Big[(2-y^2\sin x) - 2\Big(\frac{3}{y} - 2\cos x\Big)\cdot\frac{2xy - 3yly + y^2\cos x}{3x - 2y^2\sin x} +$$

$$+\Big(3\frac{x}{y^2} + 2\sin x\Big)\cdot\frac{(2xy - 3yly + y^2\cos x)^2}{(3x - 2y^2\sin x)^2}\Big] : \Big(-3\frac{x}{y} + 2y\sin x\Big)$$

$$= [(2 - y^2\sin x)y^2(3x - 2y^2\sin x)^2 - 2(3 - 2y\cos x)y \times$$

$$\times(2xy - 3yly + y^2\cos x)(3x - 2y^2\sin x) + (3x + 2y^2\sin x)$$

$$\times(2xy - 3yly + y^2\cos x)^2] : y^2(3x - 2y^2\sin x)^3.$$

§ 50.

Ако имамо єдначину $f(x,y,z) = 0$, онда одъ та три променљива броя x, y и z, могу быти найвише два независно променљиви, а трећій нека функція оба њи. Нека су независно променљиви броєви x и y. Трећій променљивый брой z тадъ, као њиова функція, може се менятн 1. ако се єданъ само одъ она два меня, а другій є притомъ сталанъ, или 2. ако се у истый махъ обадва меняю.

Ако се меня само x, имамо

$$f_1(x,y,z)_x \cdot dx + f_1(x,y,z)_z \cdot dz_x = 0;$$

ако се пакъ меня само y, быт'ће

$$f_1(x,y,z)_y \cdot dy + f_1(x,y,z)_z \cdot dz_y = 0.$$

Сабираюћи ова два почастна диференціала, имамо дакле при предпоставлѣной єдначини целый диференціалъ.

$$d\,f(x,y,z) = f_1(x,y,z)_x \cdot dx + f_1(x,y,z)_y \cdot dy$$

$$+ f_1(x,y,z)_z \cdot (dz_x + dz_y) = 0, \qquad \text{или}$$

зато што $dz_x + dz_y$ очевидно ніє ништа друго, но целый диференціалъ броя z као функціє одъ x и y, т. є. $= dz$:

$$d\,f(x,y,z) = f_1(x,y,z)_x \cdot dx + f_1(x,y,z)_y \cdot dy + f_1(x,y,z)_z \cdot dz = 0.$$

Да се и како се сва доякошня докученя могу лако разпрострети уобште на єдначине одъ произвольно колико пременљивы броєва, одъ кои є єданъ нека функція свію осталы, а ови међу собомъ независни, — као и коимъ бы се начиномъ добыли выши диференціали не само предпостоєће функціє, но и сваке друге подобне: безъ сумнѣ непотребує сада никакова више обяснѣня; али намъ за позднію потребу (при интегралномъ рачуну) остає іошъ слѣдуюће приметити.

§ 51.

Ако се у датой скривеной функціи налази какавъ сталанъ брой, онда се тай при диференціаленю иаравно губи, и диференціална єдначина одговара као такова свима онима особитимъ єдиачинама одъ прве, даваюћи ономъ сталномъ брою произвольне вредности.

Но место тогъ сталногъ броя може се такођеръ и свакій другій, у датой єдначини као чинитель или именитель стоєћій сталный брой, изъ диференціалне єдначине лако уклонити тиме, да га у првой одъ други одлучимо, и после нову єдначину диференціалимо.

Тако н. п. ако имамо скривену функцію $x^2 - ay^2 + b = 0$, па место b хоћемо или треба да уклонимо изъ диференціалне єдначине те функціе сталный брой a, делит'ћемо најпре исту функцію са y^2, чимъ добыямо

$$\frac{x^2}{y^2} - a + \frac{b}{y^2} = 0,$$

а дудъ диференціалећи

$$\frac{2x}{y^2}\,dx - \frac{2(x^2+b)}{y^3}\,dy = 0, \quad \text{или}$$

$$2xy\,dx - 2(x^2+b)\,dy = 0, \quad \text{и одтудъ}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+b},$$

диференціалну єдначину безъ a.

До ове исте єдначине можемо доћи іошъ и на тай начинъ, да дату функцію, као што є, диференціалимо, изъ добывене диференціалне єдначине a определимо, и после ту нћгову вредность заменемо у датой єдначини. Тимъ путемъ имали бы

$$2x\,dx - 2\,ay\,dy = 0, \quad \text{одтудъ}$$

$$a = \frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dy},$$

а съ томъ вредности изъ прве (дате) єдначине

$$x^2 - xy \cdot \frac{dx}{dy} + b = 0, \quad \text{т. є.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+b} \quad \text{као пре.}$$

§ 52.

На овай истый начинъ можемо не само єданъ, но коликогодъ хоћемо или треба сталны броєва изъ дате

скривене функціе уклонити, па найпосле и све, у име чега треба само да диференціаленѣ оволико пута повторимо, колико онаки броєва истребити желимо или морамо.

Диференпіалећи єдначину $xy\,dx - (x^2 + b)\,dy = 0$ за истребльиванѣ и другогъ сталногъ броя b, слѣдує

$$y\,d^2x + x\,dx\,dy - 2\,x\,dx\,dy - (x^2 + b).\,^2dy = 0, \text{ т. є.}$$

$$y\,d^2x - x\,dx\,dy - x^2.\,^2dy - b.\,^2dy = 0,$$

и одтудъ

$$b = \frac{y\,d^2x - x\,dx\,dy - x^2.\,^2dy}{^2dy};$$

съ томъ пакъ вредности изъ горнѣ єдначине

$$xy\,dx - \frac{x^2.\,^2dy + y.\,d^2x - x\,dx\,dy - x^2.\,^2dy}{^2dy}\,dy = 0, \text{ т. є.}$$

$$xy\,dx.\,^2dy - y\,d^2x.\,dy + x\,dx.\,d^2y = 0, \quad \text{или}$$

$$\frac{^2dy}{d^2x} = \frac{dy}{x\,dx} - \frac{d^2y}{y\,d^2x}.$$

В. Употребльнѣ диференціалнога рачуна у анализи.

а.) Определьиванѣ правы вредностій функція, появлююћи се подъ видовима $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$ и $\infty - \infty$.

§ 53.

Догађа се млого пута. да деловна нека функція за известну какву вредность променљивога броя, прима видъ $\frac{0}{0}$, премда є при истой вредности тога броя и сама известне, определити се могуће вредности. Тако н. п.

бива функція $v = \frac{a(x^2 - a^2)}{\sqrt{x-a}}$ за $x = a$ очевидно вида $v = \frac{0}{0}$, у ствари є пакъ за то x известно $= 0$, о чему се лако уверавамо, ако броителѣвогъ чинителя доведемо подъ кореный знакъ и скратимо, а после у изразу $v = a \times (x+a)\sqrt{x-a}$ поставимо $x = a$.

Да є ова функція v при непосредной замени одъ x съ a постала вида $\frac{0}{0}$, причиніо є, као што є лако было приметити, заєднички чинитель броителя и именителя $\sqrt{x-a}$, и то ће се за $x = a$ догодити уобште при свакой оной деловной функціи, коє броитель и именитель имаю заєдничкога чинителя $(x - a)$ у некомъ целомъ или деловномъ степену.

Нека є v $\frac{X_1 (x-a)^m}{X_2 (x-a)^n}$ такова функція, притомъ пакъ X_1 и X_2 неке, чинителя $(x-a)$ више несадржеће функціє одъ x. Та функція постає очевидно при непосредной замени одъ x съ a вида $\frac{0}{0}$; ако пакъ найпре оногъ чинителя $(x-a)$, кои то причинява, уклонимо, нѣна права вредностъ може быти уобште или 0, или $\frac{X_1}{X_2}$, или ∞, почемъ буде односно $m \gtreqless n$. Но тога чинителя одкрити и уклонити ніє свагда тако лако као у показаномъ примеру и другимъ подобнима; зато показатѣемо у слѣдующимъ §§-ма, како се праве вредности функція, скривене у символу $\frac{0}{0}$, лако могу одкрити помоћу диференціалнога рачуна.

§ 54.

У име тога нека є уобште $v = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ такова деловна функція, коя за неку известну вредностъ $x = a$ постає вида $\frac{0}{0}$.

Узимаюћи у той функціи $x+v$ место x, добыямо по телеровомъ образцу за функціє єдногъ пременљивогъ броя,

$$\frac{f(x+v)}{\varphi(x+v)}=\frac{f(x)+f_1(x)\,v+f_2(x)\cdot\frac{v^2}{2!}+\cdots}{\varphi(x)+\varphi_1(x)\,v+\varphi_2(x)\cdot\frac{v^2}{2!}+\cdots}\quad\ldots\ldots(\alpha.$$

Узимаюћи овде пакъ за x ону вредность a, бываю $f(x)$ и $\varphi(x)$ свака $=0$, и десна часть може се збогъ тога скратити съ v, тако да ако све то урадимо, слѣдує

$$\frac{f(\underset{a}{x}+v)}{\varphi(\underset{a}{x}+v)}=\frac{f_1(\underset{a}{x})+f_2(\underset{a}{x})\cdot\frac{v}{2!}+f_3(\underset{a}{x})\cdot\frac{v^2}{3!}+\cdots\cdots}{\varphi_1(\underset{a}{x})+\varphi_2(\underset{a}{x})\cdot\frac{v}{2!}+\varphi_3(\underset{a}{x})\cdot\frac{v^2}{3!}+\cdots\cdots},$$

при чему брой a свуда показує, да є у дотичнимъ функціяма место x узето a.

Найпосле ставляюћи у овомъ последнѣмъ изразу $v=0$, остає тражена вредность дате функціє за $x=a$,

$$\frac{f(\underset{a}{x})}{\varphi(\underset{a}{x})}=\frac{0}{0}=\frac{f_1(\underset{a}{x})}{\varphi_1(\underset{a}{x})},$$ а то ће рећи:

права вредность деловне функціє $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, коя за $x=a$ постає вида $\frac{0}{0}$, равна є количнику одъ диференціалногъ количника броителя, чрезъ диференціалный количникъ именителя, узимаюћи у тима диференціалнимъ количницима $x=a$.

Ради болѣгъ разумеваня, а уєдно и за упражненѣ, узмимо одма кои примеръ.

§ 55.

1.) Имамо функцію

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{a(x^2-a^2)}{\sqrt{x-a}},$$

коя, каошто смо видили у § 53., за $x=a$ постає $\frac{0}{0}$.

При той є функціи диференціалный количникъ броителя

$$f_1(x) = 2ax,$$

а диференціалный количникъ именителя

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-a}};$$

дакле количникъ одъ та два количника

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{2ax}{\frac{1}{2\sqrt{x-a}}} = 4ax\sqrt{x-a},$$

и зато за $x = a$ тражена вредность дате функціе

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}_a = \frac{0}{0} = 4a^2.0 = 0,$$

каошто смо већъ дознали у поменутомъ §-у на другій начинъ.

2.) Имамо функцію

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^3+(la-2)x^2-(2la+1)x+2}{x^2-2(1-la)x-4la},$$

коя, каошто лако можемо видити, за $x = 2$ постає $\frac{0}{0}$.

При той є диференціалный количникъ броителя

$$f_1(x) = 3x^2+2(la-2)x-2la-1,$$

а диференціалный количникъ именителя

$$\varphi_1(x) = 2x-2(1-la);$$

дакле количникъ тій диференціалны количника

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{3x^2+2(la-2)x-2la-1}{2x-2(1-la)},$$

одтудъ пакъ тражена вредность дате функціе за $x = 2$:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}_{2} = \frac{0}{0} = \frac{3 \,.\, 4 + 2\,(la - 2)\,2 - 2la - 1}{2 \,.\, 2 - 2\,(1 - la)}$$

$$= \frac{3 + 2la}{2 + la}.$$

3.) Имамо функцію

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a^x \,.\, cos\, x}{l\, sin\, x \,.\, (1 - sin\, x)},$$

коя за $x = 90^0 = \frac{\pi}{2}$, быва $\frac{0}{0}$.

Диференціалный количникъ нѣнога броителя є

$$f_1(x) = a^x (la \,.\, cos\, x - sin\, x),$$

диференціалный количникъ именителя пакъ

$$\varphi_1(x) = (1 - sin\, x) \,.\, cot\, x - l\, sin\, x \,.\, cos\, x;$$

дакле количникъ одъ та два количника

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{a^x (la \,.\, cos\, x - sin\, x)}{(1 - sin\, x)\, cot\, x - l\, sin\, x \,.\, cos\, x}.$$

и зато тражена вредность дате функціе за $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0} = \frac{a^{\frac{\pi}{2}} \,.\, (la \,.\, cos\, \frac{\pi}{2} - sin\, \frac{\pi}{2})}{(1 - sin\, \frac{\pi}{2})\, cot\, \frac{\pi}{2} - l\, sin\, \frac{\pi}{2} \,.\, cos\, \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-\, a^{\frac{\pi}{2}}}{-\, 0} = \infty.$$

§ 56.

Ако бы се догодило, да се у изразу α.) § 54. са $x = a$ потиру не само $f(x)$ и $\varphi(x)$, но тій функція диференціални количници $f_1(x)$ и $\varphi_1(x)$, тако да остає

$$\frac{f(x+v)}{\varphi(x+v)} = \frac{f_2(x)\cdot\frac{v^2}{2!} + f_3(x)\cdot\frac{v^3}{3!} + \cdots\cdots}{\varphi_2(x)\cdot\frac{v^2}{2!} + \varphi_3(x)\cdot\frac{v^3}{3!} + \cdots\cdots},$$

онда, ако најпре скратимо съ $\frac{v^2}{2!}$ и после поставимо $v = 0$, слѣдує тражена вредность дате функціе за $x = a$:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{0}{0} = \frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)},$$ то ће рећи:

у томъ є случаю права вредность те функціе равна количнику одъ другогъ диференціалногъ количника броителя, чрезъ другій диференціалный количникъ именителя, узимаюћи у свакомъ за x брой a.

Н. п. имамо функцію

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a^x(1 - \sin x)}{la\,(\cot x - 2\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x)},$$

коя, каошто лако можемо видити за $x = \frac{\pi}{0}$ постає $\frac{0}{0}$.

При той є диференціалный количникъ броителя

$$f_1(x) = a^x la\,.\,(1 - \sin x) - a^x \cos x,$$

а диференціалный количникъ именителя

$$\varphi_1(x) = la\,(-\operatorname{cosec}^2 x + 2\sin x + \cos 2x);$$

дакле количникъ тій количника

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{a^x la\,(1 - \sin x) - a^x \cos x}{la\,(-\operatorname{cosec}^2 x + 2\sin x + \cos 2x)},$$

кои за $x = \frac{\pi}{2}$ постає очевидно такођеръ $\frac{0}{0}$.

Другій є диференціалный количникъ броителя

$$f_2(x) = a^x la\,[la\,(1\ sin\,x) - cos\,x + sin\,x],$$

другій диференціалный количникъ именителя

$$\varphi_2(x) = la\,[-2\,cosec\,x\,.\,cot\,x + 2\,cos\,x - 2\,sin\,2x];$$

дакле количникъ тій количника

$$\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{a^x la\,[la\,(1 - sin\,x) - cos\,x + sin\,x]}{la(-2\,cosec\,x\,.\,cot\,x + 2\,cos\,x - 2\,sin\,2x)}$$

$$= \frac{a^x\,[la\,(1 - sin\,x) - cos\,x + sin\,x]}{-2\,cosec\,x\,.\,cot\,x + 2\,cos\,x - 2\,sin\,2x},$$

и зато тражена вредность дате функціе за $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\underset{\frac{\pi}{2}}{\frac{f(x)}{\varphi(x)}} = \frac{0}{0} = \frac{a^{\frac{\pi}{2}}}{-0} = -\infty.$$

§ 57.

Предпоставляюћи далѣ да за $x = a$ изчезаваю при деловной функціи $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ редомъ іошъ и други, трећи и т. д. диференціални количници броителя и именителя, — и испытуюћи на истый начинъ као до сада, шта због тога быва съ функціомъ $\underset{a}{\frac{f(x)}{\varphi(x)}} = \frac{0}{0}$? долазимо найпосле до тогъ обштегъ докученя: **да є права вредность функціе** $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ **у случаю, ако** $n-1$ **првы количника броителя и именителя за** $x = a$ **изчезаваю, равна количнику одъ** n. **диференціалногъ количника броителя, чрезъ** n. **диференціалный количникъ именителя, узимаюћи у истима** $x = a$; т. є. да є

$$\underset{a}{\frac{f(x)}{\varphi(x)}} = \frac{0}{0} = \underset{a}{\frac{f_n(x)}{\varphi_n(x)}}.$$

§ 58.

Предходећій начинъ одкриваня правы вредностій деловны функція, появлюући се подъ видомъ $\frac{0}{0}$, основанъ є на употребленю телеровога образца. Собомъ дакле слѣдує, да се тай начинъ у свима онима случаима неће моћи употребити, у коима насъ и самъ тай образацъ издає.

Ово ће се догодити при свакой оной деловной функціи $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, гди се или самъ броитель, или самъ именитель, или обадва при оной вредности одъ x, коя причинява, да вопросна фрнкція постає $\frac{0}{0}$, неда развити у редъ целы положны степена вишка v.

У таковомъ случаю дакле неостає ништа друго, но служити се за определьиванѣ вопросне вредности, познатимъ изъ § 29. простимъ начиномъ. Т. є. валя у броителю и именителю дотичне деловне функціе узети $x+v$ место x, све рачуне посвршивати, и нову деловну функцію после по могућству скратити, найпосле пакъ іошъ v съ нулломъ заменути.

Тако н. п. ако є вопросна деловна функція $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[5]{1-x^2}}$, быће за $x=1$, иста функція $=\frac{0}{0}$, и та ће се нѣна вредность така показати, ма колико пута броителя и именителя диференціалили. Зато, да бы ю одкрили, ставлямо

$$\frac{f(x+v)}{\varphi(x+v)} = \frac{(x+v)\sqrt[3]{1-x-v}}{\sqrt[5]{1-x^2-2xv-v^2}}.$$

То быва за $x=1$,

$$\frac{f(x_1+v)}{\varphi(x_1+v)} = \frac{(1+v)\sqrt[3]{-v}}{\sqrt[5]{-2v-v^2}} = \frac{(1+v).v^{\frac{1}{3}}}{v^{\frac{1}{5}}.(2-v)^{\frac{1}{5}}} = \frac{(1+v)\,v^{\frac{2}{15}}}{(2-v)^{\frac{1}{5}}}.$$

Одтудъ пакъ, ако узмемо $v = 0$, слѣдує тражена вредньость дате функціе за $x = 1$:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}_1 = \frac{0}{0} = \frac{0}{2^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

§ 59.

Догађа се далѣ такођеръ, да нека деловна функція $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ за неку известну вредностъ броя x прима видъ $\frac{\infty}{\infty}$.

Такову функцію можемо писати, безъ повреде нѣне вредности, овако: $\frac{1}{\varphi(x)} : \frac{1}{f(x)}$. Но тако представлѣна постає за ону вредностъ одъ x, $\frac{0}{0}$, и може се дакле лако одкрити на єданъ одъ дояко показана два начина. Вредность дакле деловне функціе $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, за $x = a$ скривену у символу $\frac{\infty}{\infty}$, наћићемо, ако диференціалный количникъ изврнутога именителя разделимо съ диференціалнимъ количникомъ изврнутога броителя, узевши у свакомъ одъ тіи количника $x = a$.

Тако н. п. ако є вопросна функція

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1 + tg\,x}{sec\,x},$$

коя за $x = \frac{\pi}{2}$, због $tg\,\frac{\pi}{2} = sec\,\frac{\pi}{2} = \infty$, постає $\frac{\infty}{\infty}$: имамо диференціалный количникъ изврнутога именитиля

$$\frac{d\,\frac{1}{sec\,x}}{dx} = \frac{d\,cos\,x}{dx} = -\,sin\,x,$$

а диференціалный количникъ изврнутога броителя

$$\frac{d\frac{1}{1+tgx}}{dx} = \frac{-d(1+tg\,x)}{(1+tg\,x)^2.\,dx} = \frac{-\frac{1}{cos^2x}}{(1+tgx)^2} = -\frac{1}{cos^2x\,(1+tg\,x)^2}$$

$$= -\frac{1}{cos^2x + 2\ sin\,x\ cos\,x + sin^2x} = -\frac{1}{(cos\,x + sin\,x)^2};$$

дакле количникъ тій количника

$$\frac{-\ sin\ x}{-\frac{1}{(cos\,x + sin\,x)^2}} = sin\,x\ (cos\,x + sin\,x)^2,$$

и зато тражена вредность горнѣ функціе за $x = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}\Big|_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\infty}{\infty} = 1\,.\,(0+1)^2 = 1.$$

§ 60.

Коипутъ наилазимо на производе одъ две функціе, кои за известну вредность премењивога броя примаю неопределѣный видъ $(0\,.\,\infty)$. Тако н. п. постае функція $f(x) = lx\,.\,cot\,.\,(x-1)$ за $x = 1$ вида $0\,.\,\infty$.

У таковомъ случаю, да бы у символу $0\,.\,\infty$ скривену вредность вопросне функціе одкрили, изражавамо ову као количникъ одъ оногъ нѣногъ чинителя, кои за дотичну вредность премењивога броя постае $= 0$, раздељѣнъ съ разломкомъ 1 чрезъ оногъ другогъ чинителя, кои за исту вредность премењивога броя быва $= \infty$; ер на тай начинъ постае после вопросна функція при той вредности премењивога броя вида $\frac{0}{0}$, кои е сасвимъ у нашой власти. Съ другимъ речма накратко: **у томъ случаю налазимо праву вредность символа $0\,.\,\infty$, ако диференціалный количникъ чинителя кои постае 0, разделимо съ диференціалнимъ количникомъ изврнутогъ оногъ другогъ чинителя, кои быва ∞, узевши у свакомъ одъ тій количника ону вредность премењивога броя, коя то причинява.**

Поступаюћи тако съ горе споменутомъ функціомъ, налазимо

$$\frac{d.lx}{dx} = \frac{1}{x}, \quad d\frac{\frac{1}{\cot(x-1)}}{dx} = \frac{d\,tg(x-1)}{dx} = \frac{1}{\cos^2(x-1)};$$

дакле количникъ та два количника

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\cos^2(x-1)}} = \frac{\cos^2(x-1)}{x},$$

и зато тражена вредность вопросне функціе за $x=1$, скривена у символу $0.\infty = \frac{\cos^2(1-1)}{1} = \frac{\cos^2 0}{1} = \frac{1}{1} = 1.$

§ 61.

Найпосле догодит'ће се, да добыемо разлику две функціе истогъ пременљивогъ броя, коя за неку вредность тога броя постае неопределѣнога вида $\infty - \infty$.

Да бы у томъ символу скривену вредность функціе $v = f(x) - \varphi(x)$ докучили, ставлямо ако є $\frac{1}{f(x)} = f'(x)$ а $\frac{1}{\varphi(x)} = \varphi'(x)$,

$$v = \frac{1}{f'(x)} - \frac{1}{\varphi'(x)},$$

у комъ виду иста функція при оной вредности пременљивога броя, због $f'(x) = \frac{1}{\infty} = 0$ и $\varphi'(x) = \frac{1}{\infty} = 0$, постае већъ разрешенога вида $\frac{0}{0}$.

Тако н. п. ако имамо определити вредность разлике $cot\,(x-1) - \frac{1}{lx}$ за $x=1$, при комъ є x очевидно $\infty - \infty$, — быт'ће због $\frac{1}{cot\,(x-1)} = tang\,(x-1)$ и $1 : \frac{1}{lx} = lx$,

$$cot\,(x-1) - \frac{1}{lx} = \frac{1}{tang\,(x-1)} - \frac{1}{lx} = \frac{lx - tg\,(x-1)}{lx \,.\, tg\,(x-1)},$$

у комъ є садъ виду иста разлика за $x = 1$, очевидно $= \frac{0}{0}$.

Быт'ће дакле зато, што є диференціалный количникъ броителя $\frac{cos^2\,(x-1) - x}{x\,cos^2\,(x-1)}$, а диференціалный количникъ именителя $\frac{tg\,(x-1) + x\,lx)}{x\,cos^2\,(x-1)}$: количникъ тіи количника $\frac{cos^2\,(x-1) - x}{tg\,(x-1) + x\,lx}$, дакле за $x=1$ вредность вопросне разлике

$$\frac{cos^2\,(1-1) - 1}{tg\,(1-1) + 1\,.\,l1} = \frac{1-1}{0+0} = \frac{0}{0},$$ опетъ неопределѣнога вида, тако да због тога морамо узети друге диференціалне количнике броителя и именителя разломка $\frac{lx - tg\,(x-1)}{lx\,.\,tg\,(x-1)}$, или, што є у ствари свеєдно, али по послу простіє, да поступамо съ $\frac{cos^2\,(x-1) - x}{tg\,(x-1) + x\,lx}$ као съ функціомъ, коя за известно $x = 1$ быва $\frac{0}{0}$.

Имамо дакле далѣ диференціалный количникъ броителя тога разломка $-2\,cos\,(x-1)\,sin\,(x-1) - 1$, а диференціалный количникъ именителя

$$\frac{1}{cos^2\,(x-1)} + lx + 1 = \frac{1 + (lx+1)\,cos^2(x-1)}{cos^2(x-1)};$$

зато количникъ та два количника

$$- \frac{2\,cos^3\,(x-1)\;sin\,(x-1) - cos^2 x}{1 + (lx+1)\,cos^2(x-1)},$$

а зато опетъ тражена вредность горнѣ разлике за $x = 1$:

$$\frac{-2\cos^3 0 \cdot \sin 0 - \cos^2 0}{1 + (l1 + 1)\cos^2 0} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

б.) Опредељиванѣ *максима'* и *минима'* функција.

1.) Максима и минима функција єдногъ пременљивогъ броя.

§ 62.

Ако є функција $f(x)$ за неку известну вредность пременљивога броя x у истый махъ већа одъ $f(x-h)$ и $f(x+h)$, или є у истый махъ маня одъ тій свои оближньи вредностій, и h є притомъ некій врло малый, одъ нулле єдва разликуюћи се брой, — онда каже се: $f(x)$ є за ону вредность одъ x у првомъ случаю **максимумъ** (већина), а у другомъ **минимумъ** (маньина), и то ће рећи, да иста функција за оно x постизава у првомъ случаю єдну одъ найвећи, а у другомъ єдну одъ найманьи свои вредностій, коє уобште може имати. Тако н. п. быва функција $f(x) = x(a-x)$ за $x = \frac{a}{2}$ **максимумъ** єръ є съ тимъ x сама $= \frac{a^2}{4}$, а нѣне две оближнѣ вредности

$$\left(\frac{a}{2} - h\right)\left[a - \left(\frac{a}{2} - h\right)\right] = \left(\frac{a}{2} + h\right)\left[a - \left(\frac{a}{2} + h\right)\right] = \frac{a^2}{4} - h^2$$

очевидно и при найманѣмъ брою h обе манѣ одъ нѣ; напротивъ є вредность функціе $f(x) = 1 - 2x + x^2$ за $x = 1$ **наймања** коя може быти, єръ є съ тимъ x сама $= 0$ или потрвена, а нѣне две оближнѣ вредности обе $= h^2$, дакле и при найманѣмъ h веће одъ нулле.

Ово понятіе максимума и минимума функција подпуно свађаюћи, увиђамо:

1.) да є нека функција онда **максимумъ**, ако су разлике између сваке нѣне оближнѣ вредности и нѣ саме обе

одречие, а онда **минимумъ**, кадъ су напротивъ те разлике обе **положне**, т. є. **максимумъ**, ако є за неко x $f(x-h)-f(x)$ и $f(x+h)-f(x)$ **одречно**, а **минимумъ** ако є $f(x-h)-f(x)$ и $f(x+h)-f(x)$ **положно**; дакле

2.) да за **максимумъ** вредность дотичне функціе съ постепенимъ увећаванѣмъ или умаляванѣмъ променльивога броя непремено мора донекле растити па онда падати, а за **минимумъ** донекле падати па онда растити, и

3.) да неке функціе по своіой природи могу имати више максима, или више минима, или и максима и минима, међу коима наравно єданъ максимумъ быт'ће највећій, а єданъ минимумъ најманьій; напротивъ опетъ неке функціе немаю никаквога ни максимума ни минимума, као н. п. $f(x)=\frac{a}{x}$, коя се при постепеномъ увећаваню броя x безъ престанка умалява, а при постепеномъ умаляваню тога броя безъ края увећава. Највећій одъ свію **односны** (релативны) максима зове се **абсолутный максимумъ**, а најманьій одъ свію минима **абсолутный минимумъ**.

§ 63.

Нека є α такова вредность променльивога броя x, по коіой бы његова нека функція $f(x)$ могла имати максима или минима, ако є то само иначе могуће.

По телеровомъ образцу добыямо разлике између оближньи вредностій функціе $f(x)$ и њ саме за ону вредность $x=\alpha$,

$$f(\underset{\alpha}{x-h})-f(\underset{\alpha}{x})=-f_1(\underset{\alpha}{x}).h+f_2(\underset{\alpha}{x}).\frac{h^2}{2!}-f_3(\underset{\alpha}{x}).\frac{h^3}{3!}+\ldots\ldots \text{ и}$$

$$f(\underset{\alpha}{x+h})-f(\underset{\alpha}{x})=+f_1(\underset{\alpha}{x}).h+f_2(\underset{\alpha}{x}).\frac{h^2}{2!}+f_3(\underset{\alpha}{x}).\frac{h^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots$$

Због изчезльиво мале вредности броя h, прьый є чланъ сваке одъ ове две разлике већій одъ сбира осталы чланова, и по тому знакъ є прве разлике одречанъ, а друге положанъ. По предходећемъ §-у пакъ треба да

су те разлике за максимумъ или минимумъ непремено єднакога знака. Докле се годъ дакле сачинитель првога члана єдне и друге разлике, т. є. првый диференціалный количникъ вопросне функціє при оной вредности броя $x = \alpha$ непотире, дотле вредность исте функціє за ту вредность одъ x неможе быти ни максимумъ ни минимумъ. Потре ли се пакъ тай количникъ съ $x = \alpha$, онда зависи све одъ сачинителя другога члана, т. є. одъ другогъ диференціалногъ количника вопросне функціє, кои є, због свагда положнога броя h^2, у обе разлике єданъ истый.

Испадне ли дакле у томъ случаю за $x = \alpha$ другій диференціалный количникъ вопросне функціє **одречанъ**, онда є вредность исте функціє при $x = \alpha$ **максимумъ**; покаже ли се пакъ тай количникъ съ томъ вредности одъ x **положанъ**, онда є при истой вредности одъ x вредность вопросне функціє **минимумъ**.

Ако бы се съ истомъ вредности $x = \alpha$ осимъ првогъ диференціалногъ количника іошъ и другій потрео, али не уєдно и трећій, онда вопросна функція, по тому што є тада трећій членъ свake одъ оне две разлике већій одъ осталы чланова, а у свакой другаче означенъ, опетъ неможе быти ни максимумъ ни минимумъ. Ако пакъ исто x потире и тай трећій диференціалный количникъ, онда зависи опетъ све одъ четвртогъ количника, онако као прећe одъ другога, и вопросна ће функція дакле у томъ случаю за $x = \alpha$ быти максимумъ или минимумъ, почемъ тай количникъ съ истимъ x испадне одречанъ или положанъ.

§ 64.

Испытуюћи на овай начинъ и далѣ, долазимо напосле до слѣдуюћегъ правила за опредељиванѣ максима и минима функція єдногъ претенљивогъ броя: **Треба вопросну функцію диференціалити и после испытати, кое вредности променљивога броя нѣнъ првый диференціалный количникъ потиру? т. є. валя после поставити тай количникъ $= 0$ и определити све коренe те єдначине; за кою одъ тій вредности променљивога**

броя постає другій диференціалный количникъ вопросне функціе *одречанъ*, при той е иста функція *максимумъ*, — за кою пакъ тай количникъ быва *положанъ*, при той е иста функція *минимумъ*.

Ако коя одъ тій, изъ єдначине $f_1(x) = 0$ нађены вредности броя x потире и другій диференціалный количникъ, онда у смотреню таковы вредности валя пређи на выше диференціалне количнике дотичне функціе, при чему за безпарне важи све оно што о првомъ, а за парне све што о другомъ.

Ако пакъ єдначина $f_1(x) = 0$ недае никакву вредность за x, или показуе какво противусловіе, онда вопросна функція нема за никакву вредность тога броя минимума или максимума, осимъ ако е такова, да се нѣне оближнѣ вредности немогу развити у редове съ положнимъ целимъ степенима вишка h, кое ће быти, ако иста вопросна функція ніе цела раціонална; єръ у томъ случаю може се догодити, да оближнѣ вредности дате функціе садрже башъ за оне вредности пременльивога броя степене вишка h съ деловнимъ изложительима, за кое дата функція постає максимумъ или минимумъ, и зато за тай случай валя понаособъ іошъ слѣдующе приметити: Ако є h^v првый деловный степенъ вишка у оближньимъ функціяма $f(x-h)$ и $f(x+h)$, онда v или є $>$ или є <1. Ако є $v>1$, онда су разлике између оближньи функція и вопросне до онога члана сасвимъ онаке исте, као кадъ садрже саме целе степене одъ h, и дакле у томъ случаю за максимумъ или минимумъ іошъ єднако $f_1(x)=0$; ако є пакъ $v<1$, онда, по §-у 31., за ону вредность одъ x, за кою вопросна функція быва максимумъ или минимумъ, постає одма првый диференціалный количникъ $f_1(x)=\frac{1}{0}$, и зато валя при испытиваню функція о коима говоримо, $f_1(x)$ не само $=0$, но и $=\frac{1}{0}$ поставити, па онда (изъ узрока што насъ диференціалный рачунъ у таковомъ случаю издае) у датой $f(x)$ узъ сваку одтудъ нађену вредность одъ x узети єданпутъ $-h$, а другипутъ $+h$, и извидити, да ли тиме образоване оближнѣ вредности $f(x-h)$ и $f(x+h)$ испадаю обе манѣ одъ $f(x)$

при узетой вредности одъ x, дакле вопросна функція **максимумъ**, или обе веће одъ $f(x)$ при узетой вредности одъ x, дакле $f(x)$ **минимумъ.**

Све ово обяснит'ће већма слѣдующи

Примери.

§ 65.

1.) Пыта се за коє вредности броя x постає функція $z = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$ максимумъ или минимумъ?

Диференціалећи ту функцію налазимо

$$\frac{dz}{dx} = x^3 - 2x^2 - x + 2\,;$$ а

$$\frac{d^2z}{d^2x} = 3x^2 - 4x - 1\,.$$

Поставляюћи пакъ $\frac{dz}{dx} = 0$, слѣдую одтудъ за x вредности $x = -1, +1$ и 2.

Сѣ првомъ одъ тій вредности постає

$$\frac{d^2z}{d^2x} = 3 + 4 - 1 = 6,$$

съ другомъ $$\frac{d^2z}{d^2x} = 3 - 4 - 1 = -2,$$

съ трећомъ $$\frac{d^2z}{d^2x} = 12 - 8 - 1 = 3\,.$$

Дакле є вопросна функція при $x = 1$ максимумъ, а при $x = -1$ и 2 минимумъ.

2.) Има ли функція $z = x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ максима или минима, и за коє вредности броя x?

При той є функціи $\frac{dz}{dx} = 2x + 2$, а $\frac{^2dz}{d^2x} = 2$, брой **положанъ**, а одъ x **независанъ**, положанъ дакле при свакой вредности одъ x, па и при оной коя слѣдує изъ єдначине $\frac{dz}{dx} = 2x + 2 = 0$, т. є. при $x = -1$; и по тому вопросна є функція z за $x = 1$ **минимумъ**, а максимума нема никаквога.

3.) Има ли каковы вредностій броя x, за коє бы функція $z = 2x^6 - 15x^4 + 24x^2 - 7$ была максимумъ или минимумъ, и коє су?

Диференціалећи добыямо

$$\frac{dz}{dx} = 12x^5 - 60x^3 + 48x, \text{ а}$$

$$\frac{^2dz}{d^2x} = 60x^4 - 180x^2 + 48; \text{ поставляюћи пакъ}$$

$\frac{dz}{dx} = 12x^5 - 60x^3 + 48x = x(x^4 - 5x^2 + 4) = 0$, добыямо за x вредности $0, -1, +1, -2$ и $+2$.

Съ првомъ одъ тій вредностій постає

$$\frac{^2dz}{d^2x} = +48,$$

съ другомъ . . . . . $= -72$,

съ трећомъ . . . . . $= -72$,

съ четвртомъ . . . . $= +288$,

съ петомъ . . . . . $= +288$.

Вопросна є функція дакле при $x = -1$ и $+1$ максимумъ, а при $x = 0, -2$ и $+2$ минимумъ.

4.) Траже се максима и минима функ. $z = x^4 - x^3 + 2$, и вредности одъ x, за коє иста функція быва єдно или друго.

Ту є $\frac{dz}{dx} = 4x^3 - 3x^2$,

$$\frac{^2dz}{d^2x} = 12x^2 - 6x.$$

Ставляюћи $\frac{dz}{dx} = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3) = 0$, слѣдую за x вредности o двапутъ, и $\frac{3}{4}$.

Ова друга вредность $x = \frac{3}{4}$, дає

$$\frac{^2dz}{d^2x} = 12 . \frac{9}{16} - 6 . \frac{3}{4} = \frac{27}{4} - \frac{18}{4} = \frac{9}{4};$$

дакле є вопросна функція при томъ x **минимумъ.**

Съ првомъ вредности $x = 0$ пакъ потире се и другій диференціалный количникъ, због чега морамо испытати слѣдуюће выше количнике.

Имамо $\frac{^3dz}{d^3x} = 24x - 6$. Но тай съ $x = 0$ непостає и самъ $= 0$. Зато вопросна функція за $x = 0$ неможе быти ни максимумъ ни минимумъ.

5.) За коє вредности броя x постає функція

$$z = (1 - x)(1 + x^2) - (1 + x)(1 - x^2) - 2x(x - 1) + a$$

максимумъ или минимумъ?

Диференціалећи добыямо

$$\frac{dz}{dx} = -(1+x^2) + 2x(1-x) - (1-x^2) + 2x(1+x) - 2(x-1)$$
$$- 2x$$

$= 0$ самъ по себи. То ће рећи тай є количникъ при свакой вредности променльивога броя раванъ нулли, и зато вопросна функція неможе имати ни максима ни минима. И доиста, ако у ньой назначене рачуне свршимо, потиру се сви променльиви чланови међу собомъ, и остає само сталный брой a, кои наравно као такавъ неможе быти ни већій ни маньій.

6.) Извидити имали функція $z = \frac{x-1}{x(x+1)}$ максима или минима, и за коє вредности броя x.

Нѣнъ є првый диференціалный количникъ

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x^2-2x-1}{x^2(x+1)^2},$$ а другій

$$\frac{d^2z}{d^2x} = -\frac{x^2(x+1)^2 \cdot 2(x-1) - (x^2-2x-1)[2x(x+1)^2+2x^2(x+1)]}{x^4(x+1)^4}$$

$$= -\frac{2x(x^2-1) - 2(x^2-2x-1)(2x+1)}{x^3(x+1)^3}$$

$$= -\frac{2(x^3-3x^2-3x-1)}{x^3(x+1)^3}.$$

Поставляюћи првый $= 0$, слѣдує $x^2 - 2x - 1 = 0$, и одтудъ $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Како є пакъ вопросна функція деловна, то треба да узмемо іошъ $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{0}$, т. є. $\frac{dx}{dz} = 0$, одкудъ добыямо $x^2(x+1)^2 = 0$, дакле $x(x+1) = 0$, и одтудъ $x = 0$ и $= -1$.

Съ првомъ вредности $x = 1 + \sqrt{2}$ быва

$$\frac{d^2z}{d^2x} = -\frac{12+8\sqrt{2}}{(7+5\sqrt{2})(20+14\sqrt{2})}$$

одречанъ, и зато вопросна функція при той вредности одъ x максимумъ.

Съ другомъ є вредности $x = 1 - \sqrt{2}$ другій диференціалный количникъ

$$\frac{d^2z}{d^2x} = -\frac{12-8\sqrt{2}}{(7-5\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})},$$

збогъ $5\sqrt{2} > 7$ а $20 > 14\sqrt{2}$, положанъ, зато пакъ вопросна функція при той вредности одъ x миниумъ.

Съ трећомъ вредности $x = 0$ имамо две оближнѣ вредности

$$\frac{0 - h - 1}{(0 - h)(0 - h + 1)} = \frac{-(h+1)}{-h(1-h)} = \frac{h+1}{h(1-h)}, \text{ а}$$

$$\frac{0 + h - 1}{(0+h)(0+h+1)} = \frac{h-1}{h(h+1)} = \frac{-(1-h)}{h(h+1)},$$

т. е. една положна, а друга одречна, и зато вопросна функція при той вредности одъ x ни максимумъ ни минимумъ.

Найпосле съ $x = -1$ оближнѣ две вредности една

$$\frac{-1-h-1}{(-1-h)(-1-h+1)} = \frac{-(2+h)}{-(1+h).(-h)} = \frac{2+h}{(1+h)h}$$

одречна, а

друга $\frac{-1+h-1}{(-1+h)(-1+h+1)} = \frac{-(2-h)}{-(1-h)h} = \frac{2-h}{(1-h)h}$ положна,

и по тому вопросна функція и при томъ x ни максимумъ ни минимумъ.

7.) Пыта се има ли функція $z = x^{\frac{1}{2}} . (a - x)^{\frac{2}{3}}$ максима или минима, и за коѐ вредности одъ x?

Ту є

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} . (a - x)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} . (a-x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3a - 7x}{6 x^{\frac{1}{2}} . (a-x)^{\frac{1}{3}}},$$

$$\frac{^2dz}{d^2x} = \frac{-42 x^{\frac{1}{2}} . (a-x)^{\frac{1}{3}} - 6(3a-7x)\left[\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} . (a-x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} x^{\frac{1}{2}} . (a-x)^{-\frac{2}{3}}\right]}{36 x . (a-x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{-42 x^{\frac{1}{2}} . (a-x)^{\frac{1}{3}} - 6(3a-7x) . \left[\frac{(a-x)^{\frac{1}{3}}}{2 x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3 (a-x)^{\frac{2}{3}}}\right]}{36 x . (a-x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{-7x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{3}} - (3a-7x)\cdot\frac{3(a-x)-2x}{6x^{\frac{1}{2}}\cdot(a-x)^{\frac{2}{3}}}}{6x\cdot(a-x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{-42x(a-x)-(3a-7x)(3a-5x)}{36x^{\frac{3}{2}}\cdot(a-x)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{7x^2-6ax-9a^2}{36x^{\frac{3}{2}}\cdot(a-x)^{\frac{4}{3}}}\cdot\ *)$$

Поставляюћи $\frac{dz}{dx} = 0$, добыямо єдначину

$$3a-7x=0,$$ и одтудъ

$$x = \frac{3}{7}a$$

Съ овомъ є вредности другій диференціалный количникъ

$$\frac{^2dz}{d^2x} = \frac{\frac{9}{7}a^2 - \frac{18}{7}a^2 - 9a^2}{36\left(\frac{3}{7}a\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(a-\frac{3}{7}a\right)^{\frac{4}{3}}} = -\frac{72a^2}{7\cdot 36\left(\frac{3}{7}a\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{4}{7}a\right)^{\frac{4}{3}}}$$

очевидно одречанъ, и зато вопросна функція при той вредности одъ x максимумъ.

Иста є функція ирраціонална. Морамо дакле нћнъ првый диференціалный количникъ $\frac{dz}{dx}$ іошъ ставити $= \frac{1}{0}$. Одтудъ слћдує єдначина

$$6x^{\frac{1}{2}}\cdot(a-x)^{\frac{1}{3}} = 0,$$ а изъ те

$$x = 0 \text{ и } x = a.$$

---

*) При овомъ и прећашнћмъ примеру ставили смо цео посао другогъ диференціалногъ количника само због тога, да бы болћ увидили оно што ћемо показати у слћдуюћемъ §у.

Образующи · оближнѣ две вредности дате функ. при свакой одъ ове две вредности броя x, имамо при првой

$$(0-h)^{\frac{1}{2}}.(a-0+h)^{\frac{2}{3}}=(-h)^{\frac{1}{2}}.(a+h)^{\frac{2}{3}}$$ єдна **мнима**,

а $(0+h)^{\frac{1}{2}}.(a-0-h)^{\frac{2}{3}}=h^{\frac{1}{2}}.(a-h)^{\frac{2}{3}}$ друга **положна.**

вопросна функція дакле прелази за то $x=0$ съ мнимога у реелно, то ће рећи: она постизава при той вредности одъ x свою **граничну** вредностъ.

При другой вредности $x=a$ имамо

$$(a-h)^{\frac{1}{2}}.(a-a+h)^{\frac{2}{3}}=(a-h)^{\frac{1}{2}}.h^{\frac{2}{3}}$$ и

$$(a+h)^{\frac{1}{2}}.(a-a-h)^{\frac{2}{3}}=(a+h)^{\frac{1}{2}}.(-h)^{\frac{2}{3}},$$

т. є. обе оближнѣ вредности **положне**, и зато вопросна функція при той вредности $x=a$ быва **минимумъ.**

§ 66.

Другій диференціалный количникъ, кои са своимъ знакомъ решава, да ли дата нека функція $z=f(x)$ постає за кою изъ єдначине првогъ диференціалногъ количника нађену вредностъ променљивогъ броя x максимумъ или минимумъ, испада при деловнимъ и ирраціоналнимъ функціяма понайвише доста сложенъ, и самъ є посао, коимъ до нѣга долазимо, обично доста дангубанъ. Зато ћемо да покажемо, како и на основу чега можемо лакше докучити знакъ тога количника при известной некой вредности променљивога броя, добывену изъ єдначине $\frac{dz}{dx}=0$.

Ако представимо броителя и именителя првогъ диференціалногъ количника дате функціе z односно са X_1 и X_2, имамо

$$\frac{^2dz}{d^2x} = \frac{d\frac{X_1}{X_2}}{dx} = \frac{X_2 . \frac{dX_1}{dx} - X_1 . \frac{dX_2}{dx}}{X_2^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{dX_1}{dx}\right)}{X_2} - \frac{X_1}{X_2} . \frac{\left(\frac{dX_2}{dx}\right)}{X_2} .$$

Ако пакъ разсудимо, да мы знакъ тога диференціалногъ количника испытуємо за оне вредности променльивогъ броя, коє првый диференціалный количникъ потиру, т. є. при коима є $\frac{dz}{dx} = \frac{X_1}{X_2} = 0$: онда увиђамо, да за такове вредности остає само

$$\frac{^2dz}{d^2x} = \frac{\left(\frac{dX_1}{dx}\right)}{X_2},$$

изразъ, кои є и простіи и лакше се добыя, него целый диференціалный количникъ безъ обзири на то.

При функціама дакле о коима говоримо, ніє нуждно направити и испытати цео другій диференціалный количникъ, но само овай простіи изразъ, коме є онъ съ пређашњимъ обзиромъ раванъ, и кои ніє ништа друго, но количникъ одъ диференціалногъ количника броителя првогъ диференціалногъ количника вопросне функціє, и именителя тогъ истогъ диференціалногъ количника.

Тако поступаюћи имали бы при 6. примеру пређашњгъ §а, при комъ є

$$\frac{dz}{dx} = \frac{X_1}{X_2} = -\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 . (x+1)^2},$$

за оне вредиости броя x, за коє є истый количникъ $= 0$, т. є. за $x = 1 \pm \sqrt{2}$,

$$\frac{^2dz}{d^2x} = -\frac{\left[\frac{d(x^2 - 2x - 1)}{dx}\right]}{x^2 . (x+1)^2} = -\frac{2x - 2}{x^2 . (x+1)^2},$$

кои изразъ при $x = 1 + \sqrt{2}$ постає

$$\frac{^2dz}{d^2x} = -\frac{2\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2.(2+\sqrt{2})^2}$$ одречанъ,

а при $x = 1 - \sqrt{2}$

$$\frac{^2dz}{d^2x} = \frac{2\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})^2.(2-\sqrt{2})^2}$$ положанъ,

каогодъ што смо нашли у поменутомъ §у, али овде очевидно млого простіе. —

Съ истомъ, ако не мож'да съ іошъ већомъ користи можемо употребити ову приметбу и при ирраціоналнимъ функціяма, гди првый диференціалный количникъ свагда мора быти деловна функція.

Тако н. п. имали бы по тому при последњемъ примеру прећашњгъ §а, за оне вредности броя x, при коима є $\frac{dz}{dx} = 0$, због $\frac{dz}{dx} = \frac{3a - 7x}{6x^{\frac{1}{2}}.(a-x)^{\frac{1}{3}}}$:

$$\frac{^2dz}{d^2x} = -\frac{7}{6x^{\frac{1}{2}}.(a-x)^{\frac{1}{3}}},$$

кои за $x = \frac{3}{7}a$ постає $= -\frac{7}{6\left(\frac{3}{7}a\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{4}{7}.a\right)^{\frac{1}{3}}}$ одречанъ,

као и тамо, тако да є по тому вопросна функція **минимумъ**, али смо ово дознали очевидно съ млого манъ труда.

§ 67.

Испитиванъ максима и минима **скривены** функція быва на основу § 48. сасвимъ на истый начинъ, као и одкривены функція. Т. є. диферениіалимо дату скривену функцію по поменутомъ §у, као да єданъ пременљивый брой одъ другога независи; ставлямо диференціалный

количникъ зависногъ пременльивогъ броя по независномъ $= 0$; определюємо одтудъ помоћу дате функціе вредности пременльивы броєва, и испытуємо после какавъ испада съ њима двугій диференціалный количникъ. За коє є одъ тіи вредностій овай количникъ одречавъ, за те є зависный брой, као функція независнога, максимумъ, — за коє пакъ тай количникъ испада положанъ, за те є истый брой минимумъ.

Слћдуюћій примеръ обяснитће ово больма.

Пыта се, за коє вредности броя x постає одъ нћга зависный брой y максимумъ или минимумъ, ако є

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.$$

Диференціалећи имамо

$$2y\,dy - 2m(y\,dx + x\,dy) + 2x\,dx = 0, \quad \text{и одтудъ}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx}.$$

Поставляюћи овай количникъ $= 0$, слћдує

$$my - x = 0, \quad \text{и одтудъ}$$

$$y = \frac{x}{m},$$

а съ овомъ вредности изъ дате єдначине 1).

$$x = \frac{ma}{\pm\sqrt{1-m^2}}, \quad \text{дакле} \quad y = \frac{a}{\pm\sqrt{1-m^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.$$

Да бы садъ видили, да ли є y, као функція одъ x, при овой нађеной вредности броя x максимумъ или минимумъ, треба намъ другій диференціалный количникъ. Тай є уобште

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{x(1-m^2)\cdot\frac{dy}{dx} + y(m^2-1)}{(y-mx)^2},$$

за нађену вредность одъ x пакъ, коя првый диференціалный количникъ $\frac{dy}{dx}$ потире,

$$\frac{^2dy}{d^2x} = \frac{y\,(m^2-1)}{(y-mx)^2} = -\frac{1}{a\sqrt{1-m^2}}.$$

Овай є другій диференціалный количникъ, дакле за $x = \frac{ma}{+\sqrt{1-m^2}}$ одречанъ, а за $x = \frac{ma}{-\sqrt{1-m^2}}$ положанъ, и по тому y као функція одъ x за прву вредность максимумъ, а за другу минимумъ.

Но првый є диференціалный количникъ функція деловна. Морамо га дакле іошъ метнути $= \frac{1}{0}$, одкуда слѣдує $y - mx = 0$, т. є. $y = mx$.

За ово y имамо по датой єдначини 1.)

$$x = \frac{a}{\pm\sqrt{1-m^2}}, \text{ дакле } y = \frac{ma}{\pm\sqrt{1-m^2}} \quad \ldots \quad (3.$$

Да бы садъ дознали є ли y при овомъ x максимумъ или минимумъ, нека є вишакъ броя y, због изчезльивогъ вишка h броя x, k. Имамо за оближнѣ вредности дате функціє съ нађенимъ вредностима одъ x и y

$$k^2 - 2mhk + 2ah\sqrt{1-m^2} + h^2 = 0, \text{ и одтудъ}$$

$$k = mh \pm \sqrt{(m^2-1)h^2 - 2ah\sqrt{1-m^2}},$$

кои изразъ показує ясно, да є k при $x = \frac{a}{+\sqrt{1-m^2}}$ доистно, ако є h одречно, а мнимо, ако є h положно; напротивъ k є при $x = \frac{a}{-\sqrt{1-m^2}}$ мнимо, ако є h одречно, а доистно, ако є h положно.

Оближнѣ су вредности броя y дакле, за обе вредности броя $x = \frac{a}{\pm\sqrt{1-m^2}}$, єдна доистна, а друга мнима, и по тому y ніє ни за єдно ни за друго x максимумъ или минимумъ, него постизава за обе граничне вредности.

§ 68.

Осимъ показаны примера у предходећимъ §§-ма, да разрешимо за упражненѣ у овомъ важномъ предмету, іошъ неколико, колико занимљивы, толико и полезны

Задатака.

1.) Брой a да се раздели на две части тако, да сбиръ квадрата исты нѣговы частій буде *найманьій*.

Ставляюћи сбиръ квадрата тражены частій датога броя $= v$, а єдну одъ тіи частій x, быт'ће она друга $(a - x)$, а

$$v = x^2 + (a - x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2.$$

Диференціалећи слѣдує

$$\frac{dv}{dx} = 4x - 2a, \quad \frac{^2dv}{d^2x} = 4;$$

првый диференціалный количникъ пакъ, ставлѣнъ $= 0$, дає $x = \frac{a}{2}$.

Но другій є диференціалный количникъ **сталанъ** брой, а **положанъ**; остає дакле положанъ при свакой вредности броя x, па и при оной, съ коіомъ вопросный сбиръ само може быти максимумъ или минимумъ.

По тому сбиръ v є за $x = \frac{a}{2}$ **минимумъ**, то ће рећи: брой a валя **преполовити**, да бы сбиръ квадрата нѣговы частій быо **найманьій.**

2.) Разделити брой a на две части тако, да производъ квадрата єдне съ кубомъ друге буде *найвећій*.

Нека є тай производъ y, а єдна часть броя a нека є x; треба да буде

$$y = x^2 . (a - x)^3 \quad \text{максимумъ.}$$

Имамо $\frac{dy}{dx} = 2x.(a-x)^3 - 3x^2.(a-x)^2 = x(a-x)^2.(2a-5x)$.

То ставляюћи $= 0$, слѣдує $x = 0$, $x = a$ и $x = \frac{2}{5}a$.

Другій є диференціалный количникъ притомъ

$$\frac{d^2y}{d^2x} = (a-x)^2.(2a-5x) - 2x(a-x)(2a-5x) - 5x(a-x)^2$$

Овай количникъ постає за трећу вредность одъ x, т. є. за $x = \frac{2}{5}a$,

$$\frac{d^2y}{d^2x} = -2a\cdot\left(\frac{3}{5}a\right)^2$$ одречанъ, дакле є y за то x максимумъ; то ће рећи, да бы производъ одъ квадрата єдне части броя a, съ кубомъ оне друге нѣгове части было найвећій, мора быти прва часть $\frac{2}{5}a$, а друга $\frac{3}{5}a$.

Оне друге две вредности за x, т. є. $x = 0$ и $x = a$, очевидно неодговараю задатку.

3.) Дата є права $\overline{AB}$, и изванъ нѣ имамо две точке P и Q. Да се изнађе у истой правой такова точка M, да сбиръ на ию повучены прави изъ P и Q буде *найманьій*. (Види слику на страни.)

Спустимо изъ точкій P и Q управне $\overline{Pa} = p_1$ и $\overline{Qb} = p_2$ на дату праву $\overline{AB}$. Быт'ће, збогъ тога што є положай исты точкій према правой $\overline{AB}$ утврђенъ, обе те управне p_1 и p_2, заєдно съ ньиовимъ међусобнимъ разстоянѣмъ $\overline{ab} = \alpha$, познате. Ставимо іошъ одстоянѣ вопросне точке M одъ a, $= x$. Быт'ће

$$\overline{PM} = \sqrt{p_1^2 + x^2}, \quad \overline{QM} = \sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2},$$

дакле вопросный сбиръ

$$y = \overline{PM} + \overline{QM} = \sqrt{p_1^2 + x^2} + \sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2}.$$

Диференціалећи имамо садъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{p_1^2 + x^2}} - \frac{\alpha - x}{\sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2}} = \frac{x}{\overline{PM}} - \frac{\alpha - x}{\overline{QM}}$$

$$= \frac{\overline{aM}}{\overline{PM}} - \frac{\overline{bM}}{\overline{QM}}.$$

Ставляюћи ово $= 0$, слѣдуе

$$\frac{\overline{aM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{bM}}{\overline{QM}},$$

изъ чега видимо, да вопросный сбиръ y само тако може быти минимумъ, ако су троугли PaM и QbM подобни; да ли є пакъ и притомъ, показатће другій диференціалный количникъ. Тай є

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{\sqrt{p_1^2 + x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{p_1^2 + x^2}}}{p_1^2 + x^2} + \frac{\sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2} - \frac{(\alpha - x)^2}{\sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2}}}{p_2^2 + (\alpha - x)^2}$$

$$= \frac{p_1^2}{(p_1^2 + x)^2 \sqrt{p_1^2 + x^2}} + \frac{p_2^2}{[p_2^2 + (\alpha - x)^2] \cdot \sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2}},$$

и испада съ вредности $x = \frac{\alpha p_1}{p_1 + p_2}$, коя слѣдуе изъ єдначине $\frac{dy}{dx} = 0$, очевидно **положанъ**. Слѣдователно y є за то x доиста **минимумъ**.

Горнѣ докученѣ, да троугли PaM и QbM мораю быти подобни, дакле **угли** PMa и QMb **равни**, подае за налазакъ вопросне точке M слѣдуюћій простый стройный начинъ: продужити валя єдну одъ управни', н. п. $\overline{Qb}$, па онда, одсекавъ $\overline{bq} = \overline{bQ}$, точку q саставити съ P; пресекъ те праве $\overline{qP}$ съ датомъ правомъ $\overline{AB}$ быт'ће тражена точка M, єръ на тай начинъ постае $< QMb = qMb = PMa$. (Слика на страни.)

4.) **Преко условлѣне точке** M **између кракова датога угла** AOB, **положити једну праву** $\overline{PQ}$ **тако, да одсеченый троугалъ** OPQ **буде найманьій.** (Види слику на страни.)

Повуцимо изъ M праву $\overline{MC} \parallel \overline{OB}$, а $\overline{MD} \perp \overline{OA}$; быт'ће праве $\overline{MD}$ и $\overline{OC}$ известне и сталне. Нека є ради краткоће $\overline{OC} = a$, $\overline{MD} = b$, садржай вопроснога троугла $OPQ = y$, найпосле $\overline{CP} = x$.

Троугли су CPM и OPQ подобни, а садржай првога раванъ є $\frac{1}{2} bx$. Има се дакле

$$y : \tfrac{1}{2} bx = \overline{OP}^2 : \overline{CP}^2 = (\overline{OC} + \overline{CP})^2 : \overline{CP}^2$$

$$= (a + x)^2 : x^2, \text{ и одтудъ слѣдує}$$

$$y = \frac{b}{2} \cdot \frac{(a+x)^2}{x}.$$

Диференціалећи садъ ову єдначину добыямо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2} \cdot \frac{2x(a+x) - (a+x)^2}{x^2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{x^2 - a^2}{x^2};$$

то пакъ ставлѣно $= 0$, дає $x = \pm a$.

Другій є диференціалный количникъ

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{b}{2} \cdot \frac{2x^3 - 2x(x^2 - a^2)}{x^4} = \frac{a^2 b}{x^3},$$

кои съ $x = +a$ испада **положанъ.**

Вопросный є дакле троугалъ **найманьій** и као такавъ $= 2ab$, ако є $x = a$.

За ону другу вредность $x = -a$ показуе се истый троугалъ као *максимумъ*; но то неможе быти, єръ бы тай максимумъ быо $y = \frac{b}{2} \cdot \frac{(a-a)^2}{-2a} = 0$, т. є. маньій одъ нађенога минимума. Смисао тога максимума извидити, оставлямо прилѣжномъ ученику.

5.) Дато є окружіе полупречника r. Да се извади одъ истога толико парче ACB, како бы садржай купе (конуса), коя ће добыти остатакъ окружія за површіе, было найвећій. (Види слику на страни.)

Нека є лукъ ADB, коя ће образовати периферію основице вопросне купе, $= x$; быт'ће полупречникъ исте основице $= \frac{x}{2\pi}$. Како ће пакъ полупречникъ r датога окружія быти страна (ивица) тражене купе, то ове высина мора быти

$$= \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{4r^2\pi - x^2}.$$

Представляюћи дакле купе садржай, кои мора быти максимумъ, съ y, имамо

$$y = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{4r^2\pi - x^2} = \frac{1}{24} \cdot \frac{x^2}{\pi^2} \cdot \sqrt{4r^2\pi - x^2}.$$

Ово диференціалећи слѣдує

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{24\pi^2} \cdot \left[2x\sqrt{4r^2\pi^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{4r^2\pi^2 - x^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \cdot \frac{8r^2\pi^2 x - 3x^3}{\sqrt{4r^2\pi^2 - x^2}}.$$

Тай количникъ пакъ ставлѣнъ $= 0$, дає єдначину

$$x(8r^2\pi^2 - 3x^2) = 0, \quad \text{изъ коє слѣдує}$$

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x = 2r\pi \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Прва одъ овы вредностій, као задатку неодговараюћа, одпада, друга пакъ дає другій диференціалный количникъ (обзиромъ на § 66.)

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{8r^2\pi^2 - 9x^2}{\sqrt{4r^2\pi^2 - x^2}} = \frac{8r^2\pi^2 - 24r^2\pi^2}{\sqrt{4r^2\pi^2 - 4r^2\pi^2 \cdot \frac{2}{3}}},$$

очевидно одречанъ, тако дакле, да є y за то x максимумъ.

6.) **Изнаћи купу окружне основице, коя є при датомъ површію найвећега садржая.**

Означуюћи полупречникъ вопросне купе съ x, висину са z, а познато површіе съ a^2: мора быти

$$a^2 = 2\pi x \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+z^2} = \pi x\sqrt{x^2+z^2},$$

одкуда слѣдує

$$z = \frac{1}{\pi x}\cdot\sqrt{a^4-\pi^2x^4},$$

тако да садъ имамо садржай купе, кои треба да буде максимумъ, представляюћи га съ y,

$$y = \frac{1}{3}x^2\pi \cdot \frac{1}{\pi x}\sqrt{a^4-\pi^2x^4} = \frac{1}{3}x\sqrt{a^4-\pi^2x^4}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{a^4x^2-\pi^2x^6}.$$

Диференціалећи быва

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^4x-3\pi^2x^5}{\sqrt{a^4x^2-\pi^2x^4}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^4x-3\pi^2x^5}{3y}.$$

Ово пакъ поставлѣно $=0$, дає $x=0$ и $x=\dfrac{a}{\sqrt{\pi\sqrt{3}}}$.

Прва вредность $x=0$ одпада, єръ незадоволява задатакъ; съ другомъ пакъ постає другій диференціалный количникъ (обзиромъ на § 66.)

$$\frac{^2dy}{d^2x} = \frac{1}{9}\cdot\frac{a^4-15\pi^2x^4}{y} = \frac{a^4-5a^4}{9y},$$

одречанъ, такавъ дакле да є вопросна купа y, при той вредности нѣнога полупречника x, каошто се захтевало, **найвећа.**

2.) Максима и минима функція два променљива броя.

§ 69.

Ако є $v = f(x, y)$ уобште нека функція два, међу собомъ независна броя x и y, па хоћемо испытати, за коє вредности тій броєва иста функція постає максимумъ или минимумъ, има се приметити слѣдующе.

§ 70.

Уобште є, ако у датой функціи прелази x у $x + h$ а y у $y + k$, заменююћи $f(x + h, y + k)$ ради краткоће съ V, по § 37.

$$V - v = \left(\frac{dv}{dx} h + \frac{dv}{dy} k\right) + \ldots\ldots$$

Ако ће пакъ дата функція v за какве вредности броєва x и y постати максимумъ или минимумъ, мораю быти нѣне оближнѣ вредности при тима вредностима променљивы броєва, у првомъ случаю све манѣ, а у другомъ све веће одъ нѣ. Тій нѣны оближньи вредностій има свега четири, т. є.

$$V_1 = f(x - h, y + k) \quad \text{са} \quad V_2 = f(x + h, y + k) \quad \text{и}$$

$$V_3 = f(x - h, y - k) \quad \text{са} \quad V_4 = f(x + h, y - k),$$

при чему h и k єсу изчезльиви броєви.

За максимумъ дакле мораю быти све четири функціє V_1, V_2, V_3 и V_4 манѣ, а за минимумъ све четири веће одъ v; а то ће наравно онда быти, ако се покажу разлике $V_1 - v$, $V_2 - v$, $V_3 - v$ и $V_4 - v$ при дотичнимъ вредностима променљивы броєва x и y, у првомъ случаю све четири одречне, а у другомъ случаю све заєдно положне.

Како су пакъ те разлике по горнѣмъ образцу

$$V_1 - v = \left[-\frac{dv}{dx}\cdot h + \frac{dv}{dy}\cdot k\right] + \ldots\ldots$$

$$V_2 - v = \left[+\frac{dv}{dx}\cdot h + \frac{dv}{dy}\cdot k\right] + \ldots\ldots$$

$$V_3 - v = \left[-\frac{dv}{dx}\cdot h - \frac{dv}{dy}\cdot k\right] + \ldots\ldots$$

$$V_4 - v = \left[+\frac{dv}{dx}\cdot h - \frac{dv}{dy}\cdot k\right] + \ldots\ldots,$$

и сваке знакъ, при изчезльиво малимъ броєвима h и k, зависи одъ првога члана, а ти су први чланови свагда разно означени: то є лако увидити, да вопросна **функція** v **неможе никако быти ни максимумъ ни минимумъ, докле годъ се сваке првый членъ, съ истимъ вредностима одъ** x **и** y, **непотру**; а то опетъ очевидно ніє могуће иначе, него ако є свакій одъ почастны првы диференціалны количника функціє v, при тима вредностима одъ x и y, за себе раванъ нулли, т. є. само ако є

$$\frac{dv}{dx} = 0 \text{ и уєдно } \frac{dv}{dy} = 0 \quad \ldots\ldots \text{(1.}$$

§ 71.

Догоди ли се то пакъ, онда могућность максима и минима функціє v зависи одъ знака дрвги чланова оны разлика, као сада найвећи одъ осталы.

У томъ случаю стоє те разлике овако:

$$V_1 - v = \frac{1}{2}\left[\frac{^2dv}{d^2x}\cdot h^2 - 2\frac{^2dv}{dxdy}\cdot hk + \frac{^2dv}{d^2y}\cdot k^2\right] + \ldots\ldots$$

$$V_2 - v = \frac{1}{2}\left[\frac{^2dv}{d^2x}\cdot h^2 + 2\frac{^2dv}{dxdy}\cdot hk + \frac{^2dv}{d^2y}\cdot k^2\right] + \ldots\ldots$$

$$V_3 - v = \frac{1}{2}\left[\frac{^2dv}{d^2x}\cdot h^2 + 2\frac{^2dv}{dxdy}\cdot hk + \frac{^2dv}{d^2y}\cdot k^2\right] + \ldots\ldots$$

$$V_4 - v = \frac{1}{2}\left[\frac{^2dv}{d^2x}\cdot h^2 - 2\frac{^2dv}{dxdy}\cdot hk + \frac{^2dv}{d^2y}\cdot k^2\right] + \ldots\ldots$$

Други су чланови дакле у томъ случаю свега само двояки, т. є.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{^2dv}{d^2x}\cdot h^2 \pm 2\,\frac{^2dv}{dx\,dy}\cdot hk + \frac{^2dv}{d^2y}\cdot k^2\right],$$

и по тому вопросна функція v у истомъ случаю, за дотичне вредности броєва x и y, быт'ће максимумъ или минимумъ, почемъ тай двоякій изразъ за исте вредности одъ x и y, испадне одречанъ или положанъ.

§ 72.

Да бы сада лакше могли увидитп, подъ коимъ условіяма може быти єдно, и подъ коимъ друго, то заменимо найпре, ради краткоће, $\frac{^2dv}{d^2x}$ съ m, $\frac{^2dv}{dx\,dy}$ съ n, а $\frac{^2dv}{d^2y}$ съ p, па онда додаймо ономъ двоякомъ изразу решаваюћегъ другогъ члана и одузмимо одъ нћга єданпутъ $\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{m}\cdot k^2$, а другипутъ $\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{p}\cdot h^2$. Быт'ће

$$\frac{1}{2}(mh^2 \pm 2\,n\,hk + p\,k^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{m}\cdot k^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{m}\cdot k^2$$

$$= \frac{1}{2}\,m\,(h \pm \frac{n}{m}k)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{mp-n^2}{m}\cdot k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha.,$$

или

$$\frac{1}{2}(mh^2 \pm 2\,n\,hk + p\,k^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{p}\cdot h^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{p}\,h^2$$

$$= \frac{1}{2}\,p\,(k \pm \frac{n}{p}h)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{mp-n^2}{p}\cdot h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta.,$$

изъ чега опетъ видимо, да знакъ другога члана зависи само одъ m, p, и разлике $mp-n^2$, єръ $(h \pm \frac{n}{m}k)^2$ и k^2, или $(k \pm \frac{n}{p}h)^2$ и h^2, на нћга, као свагда положни броєви, никако невліяю.

То приметивши увиђамо лако

изъ α.): решаваюћій изразъ испада **одречанъ**, и зато вопросна функція **максимумъ**, ако є за дотичне вредности одъ x и y, m **одречно**, и притомъ $mp - n^2 = 0$ или такођеръ **одречно**; напротивъ истый изразъ быт'ће **положанъ**, и зато вопросна функція **минимумъ**, ако є m **положно**, и притомъ $mp - n^2 = 0$ или такођеръ **положно**; —

изъ β.): решаваюћій изразъ быт'ће **одречанъ**, и зато вопросна функція **максимумъ**, ако є p **одречно** и притомъ $mp - n^2 = 0$ или такођеръ **одречно**, напротивъ истый изразъ быт'ће **положанъ**, и збогъ тога вопросна функція **минимумъ**, ако є p **положно**, и заєдно $mp - n^2 = 0$ или такођеръ **положно**. Или, ако оба та докученя у єдно сведемо: функція v быт'ће за оне вредности броєва x и y, нађене изъ єдначина' њны првы почастны диференціалны количнака', **максимумъ**, съ коима испадаю њни чисти други почастни диференціални колнчници m и p **одречни**, и притомъ производъ тій количника, mp или $=$ или $>$ одъ квадрата n^2, мешовитогъ другогъ почастногъ диференціалногъ количника n; напротивъ функція v быт'ће за оне вредности одъ x и y, добывене изъ поменуты єдначина', **минимумъ**, при коима њни чисти почастни други диференціални количници m и p испадаю **положни**, и уєдно є производъ тій количника, mp или $=$ или $>$ одъ n^2, т. є. одъ квадрата мешавитогъ другогъ почастногъ диференціалногъ количника n.

§ 73.

По свему тому дакле, ако имамо испытати, да ли дата нека функція $v = f(x, y)$, два променљива броя x и y, постає за какове вредности тій броєва максимумъ или минимумъ? треба исту функцію по свакомъ променљивомъ брою почастно диференціалити, свакій њнъ првый почастный диференціалный количникъ метнути $= 0$, и изъ тій єдначина' после изнаћи све вредности броєва x и y; направивши затимъ све друге почастне њне диференціалне количнике, валя сваку спрегу нађены тій вредности одъ x и y у исте поставити, па видити, съ

коіомъ постаю чисти други диференціалници количници обадва одречни, или обадва положни, а поредъ тога іошъ њиовъ производъ $>$ или $=$ квадрату мешавитогъ другогъ диференціалногъ количника? За сваку ону спрегу одъ x и y, при коіой су поредъ овогъ последњгъ условія чисти други количници **одречни**, быт'ће вопросна функція **максимумъ**; напротивъ за сваку ону спрегу, гди поредъ истога условія ти количници испадаю **положни**, быт'ће вопросна функція **минимумъ**.

§ 74.

Осимъ тога приметити валя іошъ:

1.) **У** случаю, ако су први почастни диференціални количници функціе целе, па њиове єдначине недаю никакве вредности променљивы броєва, или показую каково противусловіе, — онда вопросна функція непостае никакве вредности тій броєва максимумъ или минимумъ.

2.) **У** случаю пакъ, ако су поменути количници функціе деловне, па њиове єдначине недаю никакве вредности променљивы броєва, — онда, изъ исты узрока као при функціяма єдногъ само променљивогъ броя (§ 64), треба свакій одъ тій количника поставити іошъ и $= \frac{1}{0}$, или што є свеєдно, именителя свакогъ одъ њи $= 0$, па видити, недаю ли те єдначине какве вредпости за променљиве броєве? Добыю ли се одтудъ какове вредности тій броєва, онда є вопросна функція за оне њиове спреге максимумъ или минимумъ, съ коима испадаю нѣне оближнѣ вредности односно све одречне, или све положне. Недобыю ли се пакъ ни одтудъ вредности променљивы броєва, или покажули и те єдначине какво противусловіе, — онда вопросна функція нема никаква максимума или минимума. — Найпосле

3.) **У** случаю, ако се съ нађенимъ вредностима променљивы броєва изъ єдначина' првы почастны диференціалны количника потру и други чланови решаваюћи разлика' $V_1 - v$, $V_2 - v$, $V_3 - v$ и $V_4 - v$, — онда тре-

бало бы испытиванѣ максимума и минимума предузети помоћу слѣдующи чланова исты разлика. Но како су выши диференціални количници вопросне функціе, изъ кои се ти чланови састое, што далѣ то све сложеніи, и због тога испытиванѣ посредствомъ ньи све теже: то е у таковомъ случаю найболѣ служити се самимъ оближньимъ вредностима дате функціе при онимъ, друге чланове разлика потирућимъ вредностима променльивы броева, — видити т. е. какве испадаю оближнѣ вредности съ тима вредностима, да ли све одречне, или све положне, или едне одречне а друге положне? да бы после могли казати: у првомъ е случаю вопросна функція максимумъ, у другомъ минимумъ, а у трећемъ неможе быти ни едно, ни друго.

Садъ да узмемо, колико за болѣ обяснѣнѣ свега дояко изложенога, толико и ради нуждног упражненя у томъ важномъ предмету, іошъ и неколико

Задатака.

§ 75.

1.) Разделити брой a на три части тако, да производъ разлика' измећу нѣга и сваке нѣгове части буде максимумъ.

Означуюћи едну частъ датога броя a съ x, другу съ y, быће трећа $(a-x-y)$, а разлике измећу нѣга и тій частій $(a-x)$, $(a-y)$ и $(x+y)$. Дакле ако производъ овы разлика', кои треба да буде максимумъ, назовемо z, имамо

$$z=(a-x)(a-y)(x+y)=x^2(y-a)+x(y-a)^2-ay(y-a).$$

Поступаюћи садъ по упутству предходећи §§-а, добыямо

$$\frac{dz}{dx}=2x(y-a)+(y-a)^2,$$

$$\frac{dz}{dy}=x^2+2x(y-a)-a(2y-a);$$

ти количници, поставлѣни свакій $=0$, даю єдначине

$$2x+y-a=0$$

$$x^2+2(y-a)x-a(2y-a)=0;$$

изъ овы пакъ слѣдує само єдна, задатку одговараюћа спрега, $y=\frac{1}{3}a$ съ $x=\frac{1}{3}a$

Далѣ имамо

$$\frac{^2dz}{d^2x}=2(y-a),\ \frac{^2dz}{d^2y}=2x-2a,\ \frac{^2dz}{dx\,dy}=2x+2(y-a),$$

и ти количници постаю за нађено x и y, односно $=-\frac{4}{3}a, -\frac{4}{3}a$ и $-\frac{2}{3}a$; дакле прва два оба одречни, и њиовъ производъ $\frac{16}{9}a^2>\frac{4}{9}a^2$ квадрата трећега. Слѣдователно функція z є за $x=y=\frac{1}{3}a$ максимумъ, а то ће рећи: датый брой a быт'ће по условію задатка раздѣлѣнъ, ако су све три нѣгове части **єднаке.**

Тако исто морао бы се делити брой a на три части, кадъ бы се искало, да производъ сбирова одъ две и две части, или сбиръ производа сваке две и две буде максимумъ, о чему нека се почетникъ увери самъ.

2.) **Разделити брой a на три части x, y и $(a-x-y)$ тако, да сбиръ количника' одъ треће $a-x-y$ са сваком одъ првы, буде минимумъ.**

Означуюћи вопросный сбиръ са z, имамо

$$z=\frac{a-x-y}{x}+\frac{a-x-y}{y},$$

и то треба да буде минимумъ. Да видимо може ли быти.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y-a}{x^2} - \frac{1}{y} = \frac{y^2 - ay - x^2}{x^2 y},$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{x} + \frac{x-a}{y^2} = \frac{x^2 - ax - y^2}{xy^2}.$$

Ти количници ставлѣни свакій $= 0$, даю єдначине $y^2 - ay - x^2 = 0$ и $x^2 - ax - y^2 = 0$, изъ кои слѣдує $x = y = 0$.

То исто налазимо, и ако ставимо

$$\frac{y^2 - ay - x^2}{x^2 y} = \frac{1}{0} \text{ и } \frac{x^2 - ax - y^2}{xy^2} = \frac{1}{0}.$$

Но те вредности задатку неодговараю, а друге недобыямо; зато функція z нема ни максима ни минима, а то ће рећи: датый брой a никако неможе се делити по условію.

3.) **Построити троугалъ, кой є при датой периферіи *найвећегъ* садржая.**

Означуюћи съ $2S$ дату периферію (сбиръ страна) троугла, а съ x, y и $2S - x - y$ нѣгове стране, имамо познатимъ начиномъ вопросный нѣговъ садржай, кой да буде максимумъ,

$$z = \sqrt{S(S-x)(S-y)(x+y-S)};$$ и одтудъ

$$\frac{dz}{dx} = \frac{S(S-y)(2S-2x-y)}{2z}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{S(S-x)(2S-2y-x)}{2z}.$$

Ови количници, поставлѣни свакій $= 0$, даю само

$$2S - 2x - y = 0 \text{ и } 2S - 2y - x = 0,$$

као задатку одговараюће єдначине за x и y. Изъ тій пакъ слѣдує $x = y$, дакле $2S - 3x = 0$, и одтудъ $x = \frac{1}{3} \cdot 2S$.

Слѣдователно вопросный троугалъ, да бы могао быти максимумъ, мора быти **равностранъ**. Да ли є пакъ то и као такавъ, показаћe слѣдующи други диференціални количници:

$$\frac{^2dz}{d^2x} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{S^2}{z},\ \frac{^2dz}{d^2y} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{S^2}{z} \text{ и } \frac{^2dz}{dx\,dy} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{S^2}{z}.$$

Ти бываю за нађене вредности одъ x и y, односно $= -\frac{3}{\sqrt{3}}, -\frac{3}{\sqrt{3}}$ и $-\frac{3}{2\sqrt{3}}$. Како є пакъ поредъ одречна прва два іошъ њиовъ производъ $3 >$ одъ квадрата $\frac{3}{4}$ трећега, то є z при тима вредностима одъ x и y максимумъ, и по тому: троугалъ дате периферіе быт'ће највећега садржая, ако є равностранъ.

4.) **Какавъ мора быти правый параллелопипедъ, да бы скупно нѣгово површіе при известной запремини было** *најманѣ?*

Представляюћи съ x, y и z размере вопроснога параллелопипеда при условљной нѣговой запремини c^3, имамо нѣгово површіе, коє треба да буде минимумъ,

$$v = 2xy + 2xz + 2yz, \text{ или због } xyz = c^3,$$

т. є. $z = \frac{c^3}{xy}$:

$$v = 2\left(xy + \frac{c^3}{x} + \frac{c^3}{y}\right).$$

Овай изразъ дає

$$\frac{dv}{dx} = 2\left(y - \frac{c^3}{x^2}\right) \text{ и } \frac{dv}{dy} = 2\left(x - \frac{c^3}{y^2}\right);$$

изъ овы количника пакъ, постављны свакій $= 0$, слѣдує $x^2y = xy^2 = c^3$, т. є. $x = y = c$, а съ тима іошъ и $z = \frac{c^3}{xy} = c$.

Ако ће дакле површіе вопроснога параллелопипеда быти минимумъ, мора истый быти коцка.

Далѣ имамо друге диференціалне количнике за нађене вредности одъ x, y и z,

$$\frac{^2dv}{d^2x} = \frac{4c^3}{x^3} = 4, \frac{^2dv}{d^2y} = \frac{4c^3}{y^3} = 4, \frac{^2dv}{dx\,dy} = 2;$$ и

одтудъ видимо, да су оба прва положни, и њиовъ производъ $16 >$ одъ квадрата 4 трећега, дакле да є при нађенимъ размерама параллелопипеда, нѣгово површіе доиста *најманѣ*.

в.) Опредељиванѣ абсолутны максима' и минима', и граничны вредностій функція.

§ 76.

Абсолутный максимумъ, или абсолутный минимумъ неке функціе (§ 62), или є єданъ одъ релативны максима или релативны минима, или є пакъ **гранична** вредность дотичне функціе, т. є. такова вредность, гди иста функція прелази изъ доистнога у мнимо. Ако смо дакле изнашли сваколика максима и минима, и све граничне вредности неке функціе, онда међу тима налази се непремено и нѣнъ абсолутный максимумъ и абсолутный минимумъ.

Опредељиванѣ односны максима и минима видили смо у предходећимъ §§-ма; остає само іошъ да покажемо изтраживанѣ **граничны** вредностій.

§ 77.

Дата нека функція $f(x)$ постизава по предходећему за $x = \alpha$ тако свою граничну вредность, ако є при той вредности променљивога броя єдна нѣна оближня вредность доистна, а она друга мнима, свеєдно коя єдно а

коя друго. Како су пакъ $f(x-h)$ и $f(x+h)$ у случаю ако се за $x=\alpha$ могу развити у редове съ целимъ **положнимъ** степенима броя h, каошто смо већъ видили пре, свагда обе доистне, — то дакле редови исты функція, ако ће $f(x)$ да постигне за $x=\alpha$ свою граничну вредность, мораю за $x=\infty$ непремено садржати чланове съ деловнимъ изложительима одъ h. И то є довольно за увиђанѣ, да ћемо све вредности $x=\alpha$ пременльивога броя, при коима вопросна функція постизава граничне вредности изнаћи: ако на основу пређе споменутога §а поставимо $f_1(x)=\frac{1}{0}$, $f_2(x)=\frac{1}{0}$, и т. д., изъ тій єдначина' све вредности одъ x определимо, и после оближнѣ функціе дате функціе са сваком одъ ньи испытамо у томъ обзиру, да ли испадаю єдна доистна а друга мнима? за коє x то буде, при томе постає $f(x)$ **гранична** вредность.

Овай посао показат'ће подробніе примери слѣдуюћегъ

§ 78.

1.) Има ли функція $v=f(x)=(1-x)\cdot\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{3}{2}}$ граничны вредностій, и за коє вредности броя x?

При той су $f_1(x)=\frac{dv}{dx}=-\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}$

$$f_2(x)=\frac{^2dv}{d^2x}=-\frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_3(x)=\frac{^3dv}{d^3x}=-\frac{3}{8}(1-x)^{-\frac{3}{2}},$$

. . . . . .

Ставляюћи ове количнике редомъ свакій $=\frac{1}{0}$, видимо, да єдначина одъ првога недає никакву вредность за x, а да єдначине одъ осталы све само $x=1$ показую. Дата функція дакле само при овоме x могла бы

постиђи свою граничну вредность. — Да видимо какве се показую оближнѣ вредности дате функціе при томе x.

$$f(1-h) = [1-(1-h)] . \sqrt{1-(1-h)} = h . \sqrt{h} ,$$

$$f(1+h) = [1-(1+h)] . \sqrt{1-(1+h)} = -h . \sqrt{-h} ;$$

прва є доистна, а друга мнима; дакле вредность вопросне функціе прп $x=1$ доиста гранична вредность, и та є $f(x)=v=0$.

2.) За коє вредности одъ x постизава функція

$$f(x) = \frac{a+x}{\sqrt{a-x}}$$ граничне вредности?

$$f_1(x) = \frac{3a-x}{2(a-x)\sqrt{a-x}} , \quad f_2(x) = \frac{7a-x}{4(a-x)^2 . \sqrt{a-x}} ,$$

. . . . . .

Ови количници, каогодъ и сви слѣдующи, постављени $= \frac{1}{0}$, даю само єдну вредность $x=a$. Дата функція дакле само при той вредности могла бы постиђи свою граничну вредность.

Оближнѣ нѣне вредности съ тимъ x єсу

$$f(a-h) = \frac{a+a-h}{\sqrt{a-(a-h)}} = \frac{2a-h}{\sqrt{h}} ,$$

$$\text{и} \quad f(a+h) = \frac{a+a+h}{\sqrt{a-(a+h)}} = \frac{2a+h}{\sqrt{-h}} :$$

дакле єдна доистна а друга мнима, и зато є вредность дате функціе за $x=a$ доистна гранична вредность. Та є

$$f(x) = \frac{2a}{0} = \infty .$$

3.) За кое вредности одъ x быва вредность функціе

$f(x) = a^2 - x^2 + (ax - x^2)^{\frac{5}{2}}$ гранична вредность?

$$f_1(x) = -2x - \frac{5}{2}(ax - x^2)^{\frac{3}{2}} . (a - 2x)$$

$$f_2(x) = -2 - \frac{5.3}{2^2} . (ax - x^2)^{\frac{1}{2}} . (a - 2x)^2 - 5(ax - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$f_3(x) = \frac{5.3.1}{2^3} . (ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} . (a - 2x)^3 - 5.3 . (ax - x^2)^{\frac{1}{2}} . (a - 2x)$$

и т. д., при чему є лако приметити, да ће сви слѣдующи количници садржати некій одречный степенъ одъ $(ax - x^2)$.

Ставляюћи ове количнике редомъ $= \frac{1}{0}$, недобыямо одъ єдначине првога и другога никакву вредность за x, трећа єдначина пакъ и све остале даю само єдну вредность $x = a$.

Съ томъ вредности быва

$$f(a - h) = a^2 - (a - h)^2 + [a(a - h) - (a - h)^2]^{\frac{5}{2}}$$

$= 2ah - h^2 + (ah - h^2)^{\frac{5}{2}}$ доистна, а

$f(a + h) = -2ah - h^2 + (-ah - h^2)^{\frac{5}{2}}$ очевидно мнима.

По тому вредность дате функціе при $x = a$ гранична є вредность, и као такова $= 0$.

Као последнѣ употребљнѣ диференціалнога рачуна у анализи, да покажемо іошъ и

г.) Опредељиванѣ вредностій функція, за вредности пременљивога броя $= \infty$.

§ 79.

То є при већой части функція врло лакъ посао, ако приметимо слѣдующе:

Кадъ є x безкрайно, онда є $\frac{1}{x}$ изчезљиво мало или о. Ако дакле имамо изнаћи вредность функціе $f(x)$ за $x = \infty$, треба само место x узети $\frac{1}{z}$, и нову функцію помоћу маклореновогъ образца (или и просто) развити у редъ степена одъ z, па онда іошъ поставити $z = 0$; што остане быт'ће тражена вредность $f(x)$ за $x = \infty$.

Ово безъ сумнѣ непотребує никаква даля обясненя; но има доста случаєва, гди се съ тимъ начиномъ неможе изаћи на край, и гди се дакле чему другомъ досетити валя.

То ће быти, кадгодъ се у дотичной функціи буду налазили логаритми; у комъ случаю пре свега валя уклонити логаритамъ. Како то быва, неможе се уобште рећи, но показат'ћемо на єдномъ примеру.

Ако тражимо вредность функціе $v = \frac{1 - lx}{(x-1)^n}$ за $x = \infty$, можемо за уклоненѣ логаритма ставити $lx = z$, дакле $x = e^z$. Тадъ быва

$$v = \frac{1-z}{(e^z-1)^n} = \frac{1-z}{(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots)^n}$$

$$= \frac{1-z}{z^n\,(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\dots)^n}$$

$$= \frac{1}{z^n.\,(1+\frac{z}{2!}+\dots)^n} - \frac{1}{z^{n-1}.\,(1+\frac{z}{2!}+\dots)^n}$$

$$= \frac{1}{z^{n-1}.(1+\frac{z}{2!}+\dots)^n} \cdot (\frac{1}{z} - 1) \cdot$$

Ставляюћи овде пакъ $z = l\,(x = \infty) = \infty$, постає овай изразъ очевидно (због $\frac{1}{z} = \frac{1}{\infty} = 0$), при **положномъ** брою n,

$$= -\frac{1}{\infty} = -0, \text{ а при одречномъ } n$$

$$= -\infty;$$

и по тому вопросна є функція за $x = \infty$ равна 0, ако є n положно, а $= -\infty$, ако є n одречно.

КЊИГА II.

ИНТЕГРАЛНЫЙ РАЧУНЪ.

А. Интегралнѣ функція єдногъ пременльивогъ броя.

а) Понятія.

§ 80.

Ако є $\varphi(x)\,dx$ **нека дата диференціална функція по** x, **па се тражи основна функція, т. є. она функція** $f(x)$, **одъ коє диференціаленѣмъ та дата постає: онда посао, коимъ добыямо основну функцію** $f(x)$, **зове се интегралнѣ дате функціє, а сама основна функція** $f(x)$ **притомъ, нѣнъ интегралъ.**

Да се дата диференціална функція има интегралити, означує се предпоставлѣнимъ іой знакомъ $\int$, **тако да пишемо, и по предходећему треба да є** $\int \varphi(x)\,dx = f(x)$ **(читай интегралъ функціє** φ **одъ** x **пута** dx, **равань є функціи** f **одъ** x).

Интегралнѣ є дакле противный рачунъ диференціаленю, и знаци се $\int$ **и** d **зато, кадъ се као налажући састану, узаямно поричу и поништаваю.**

§ 81.

По горњемъ понятію треба да є $df(x) = \varphi(x)\,dx$, т. є. диференціалъ тражене функціє (интеграла) равањ датой диференціалной функціи, а у § 4. видили смо, да се при диференціаленю стални броєви губе, и да є због тога диференціалъ свію функція єдногъ истогъ променљивогъ броя, кое се међу собомъ само съ некимъ сталнимъ броємъ разликую, єданъ истый.

Лако є дакле увидити, да обратно интегралъ свake дате диференціалне функціє има безбройно млого вредностій, кое се међу собомъ све само съ некимъ, іошъ непознатимъ сталнимъ броєвима разликую, и да є зато свакій интегралъ уобште, т. є. до известногъ одкрића принадлежећегъ му сталнога броя, неопределѣнъ.

Интегралъ, кои тай непознатый сталный брой іошъ садржи, зове се подпуный или обштій, интегралъ напротивъ, у комъ є истый брой већъ приміо неку известну вредность, зове се особитый.

Обштій интегралъ дакле добыямо, ако изнађеномъ особитомъ интегралу додамо іошъ некій непознатый сталный брой.

Овай сталный брой представля се обично съ писмомъ C, као почетнимъ писмомъ речи constans, одкрива се пакъ у известнимъ случаєвима изъ саме природе дотичнога предмета. Тако н. п. ако є обштій $\int \frac{dx}{x} = lx + C$, а изъ природе тичућегъ се предмета зна се, да истый $\int$ за $x = \alpha$ быва $= a$, имамо обзиромъ нато, $a = l\alpha + C$, одкуда слѣдує $C = a - l\alpha$, а съ томъ вредности после особитый $\int \frac{dx}{x} = lx + a - l\alpha = l\frac{x}{\alpha} + a$.

§ 82.

Да свакій обштій интегралъ доиста мора садржати некій іошъ непознатый сталный брой, и да съ тога после

што у предходећемъ §-у поглавито рекосмо, доиста све онако постои, — уверавамо се іошъ и на слѣдуюћій начинъ.

Ако є $\int \varphi(x)\,dx = f(x)$, имамо по §-у 80. $f_1(x) = \varphi(x)$, дакле $f_2(x) = \varphi_1(x)$, $f_3(x) = \varphi_2(x)$, и т. д., и зато по простомъ маклореновомъ правилу (§ 32.), ако место одъ x више независећегъ, т. є. по нѣму сталнога броя $f(x_0)$ узмемо C,

$$\int \varphi(x)dx = f(x) = C + \varphi(x_0).x + \varphi_1(x_0).\frac{x^2}{2!} + \varphi_2(x_0).\frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

изразъ, кои съ неизвестнимъ, по x сталнимъ броємъ C, горе речено подпуно потврђує.

Да є пакъ десна часть истога израза доиста општа вредность траженога интеграла, увиђамо съ места, чимъ образуємо прву нѣгову функцію; єръ тадъ слѣдує обзиромъ нато, да є C по x стално,

$$f_1(x) = \varphi(x_0) + \varphi_1(x_0).x + \varphi_2(x_0).\frac{x^2}{2!} + \ldots,$$ т. є. $f_1(x) = \varphi(x)$,

каошто по понятію интеграла треба да буде, єръ десна часть ове єдначине по поменутомъ маклореновомъ образцу ніє нико другій, но $\varphi(x)$.

Осимъ пређашнѣга потврђеня увиђамо изъ дотичнога израза іошъ и то, да и како можемо представити интегралъ сваке диференціалне функціе у виду безкрайнога реда степена одъ x или $(x - \alpha)$ (§ 32.). Да ће пакъ тай редъ быти краянъ, ако є $\varphi(x)$ у вопросномъ интегралу функція алгебрайска раціонална цела, безъ сумнѣ непотребує нарочнога доказа.

§ 83.

По роду дате функціе, као диференціалъ, разликуємо и разне родове интеграла. Имамо т. є. просте и выше интеграле.

Ако є дата диференціална функція првый или простый диференціалъ, онда є тражена функція нѣнъ првый или простый интегралъ; ако є пакъ она функція другій, трећій, и т. д. диференціалъ, онда є тражена функція односно нѣнъ другій, трећій, и т. д. интегралъ. По себи пакъ разуме се, да выше интеграле истимъ путемъ морамо тражити, као и выше диференціале; каогодъ што смо т. є. другій, трећій, и остале выше диференціале добыли єданпутъ, двапутъ и односно више пута повторенимъ диференціаленѣмъ, тако исто налазимо другій, трећій, и остале выше интеграле єданпутъ, двапутъ, и дотично више пута повторенимъ интеграленѣмъ. Уобште, ако є $^{n}d\,f(x) = \varphi(x)\,d^{n}x$, т. є. $\varphi(x)\,d^{n}x$ n-ный диференціалъ функціє $f(x)$, онда є обратно $f(x) = {}^{n}\int \varphi(x)\,d^{n}x$, т. є. функція $f(x)$ n-ный интегралъ функціє $\varphi(x)\,d^{n}x$, и добыямо є интегралећи ову последню застопце n пута.

§ 84.

При интеграленю сваке дате диференціалне функціє старамо се пре свега, да нѣнъ интегралъ, или непосредно или после некогъ нѣногъ преображая добыємо у виду крайне функціє. Ово на жалость при већой части интеграла ніє могуће, али гдигодъ се може, ту служе, поредъ другогъ доякошнѣгъ знаня, ниже слѣдующа **основна правила и образци.** Што се пакъ тиче начина, како се дате диференціалне функціє, гди мора быти, за употребленѣ тій правила и образаца удешаваю, то є лако увидити, да се о тому немогу поставити никакова обшта правила. Ту служи понайвише само собствено промотренѣ и оштроуміє, и све што се у томъ обзиру може урадити, састои се у упућиваню съ разрешенѣмъ неколико, таково удешаванѣ изискующи интеграла. Мы ћемо то урадити мало касніе при поставляню помоћны образаца.

б.) Основна правила и образци.

§ 85.

1.) Простимъ изврtанѣмъ правила II. и III. §-а 4. слѣдує

I.) $\int A\varphi(x)\,dx = A\int\varphi(x)\,dx$ и

II.) $\int[f(x)\,dx \pm \varphi(x)\,dx \pm \ldots] = \int f(x)\,dx \pm \int\varphi(x)\,dx \pm \ldots$

Првый одъ ова израза показує, да при интегралению функціе, коя є снабдевена съ каквимъ сталнимъ чинителѣмъ, овога одма као чинителя и интеграла предъ интегралный знакъ извадити можемо и валя.

По другомъ є пакъ изразу интегралъ алгебрайскогъ сбира више диференціалны функція раванъ алгебрайскомъ сбиру интеграла поедины тій функція.

2.) Интегралећи правило IV. поменутога §-а, и опредељаваюћи после $\int\varphi(x)\,df(x)$, слѣдує

III.) $\int\varphi(x)\,df(x) = \varphi(x)\,f(x) - \int f(x)\,d\varphi(x)$,

изразъ, кои садржи правило такозваногъ почастногъ интеграленя.

3.) Ако у $\int f(x)\,dx$ узмемо место x произвольну неку функцію $\varphi(z)$, коя x више несадржи, добыямо

IV.) $\int f(x)\,dx = \int f[x=\varphi(z)]\,.\,d\varphi(z) = \int\{f[x=\varphi(z)]\,.\,\varphi_1(z)\}\,.\,dz$,

изразъ, у комъ є садржано правило интеграленя заменомъ.

4.) Пошто є $d\,alf(x) = a\,.\,\frac{df(x)}{f(x)}$, мора быти обратно

V.) $\int a\,.\,\frac{df(x)}{f(x)} = a\,.\,lf(x)$,

то ће рећи: ако є при датой деловной диференціалной функціи, немотрећи на сталне чинителѣ, броитель ди-

ференціалъ именителя, онда є траженый интегралъ природный логаритамъ именителя, съ надлежнимъ обзиромъ на оне чинителѣ.

§ 86.

Простимъ извртанѣмъ образаца §§ 6. — 14. слѣдую

1.) $\int x^n . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

2.) $\int a^x . dx = \frac{a^x}{la}$

3.) $\int e^x . dx = e^x$

4.) $\int \frac{dx}{x} = lx$

5.) $\int sin\, x . dx = -cos\, x = sin\, v . x$

6.) $\int cos\, x . dx = sin\, x = -cos\, v . x$

7.) $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tang\, x$

8.) $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -cot\, x$

9.) $\int \frac{sin\, x . dx}{cos^2 x} = sec\, x$

10.) $\int \frac{cos\, x . dx}{sin^2 x} = -cosec\, x$

11.) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,(sin = x) = -arc\,(cos = x)$

12.) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,(tang = x) = -arc\,(cot = x) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} . l \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$

13.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = arc\,(sec = x) = -arc\,(cosec = x)$

14.) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = arc\,(sin\, v . = x) = -arc\,(cos\, v . = x)$

15.) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = l(x+\sqrt{1+x^2}) = -l(x-\sqrt{1+x^2})$

16.) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x}$.

За ове образце имамо іошъ приметити: 1.) да свакомъ одъ њи за подпуный интегралъ валя іошъ придати некій сталный брой; 2.) да сви стоє тако исто, ако место x узмемо ма какву функцію, и 3.) да ако за неке одъ њи и имамо више вредностій, ове зато немораю быти безусловно єднаке, но могу се међу собомъ разликовати съ каквимъ сталнимъ броємъ.

в.) Помоћни образци.

§ 87.

1.) Ставимо у име определяваня $\int (a+bx)^n . dx$, было n ма какавъ брой, $a+bx=z$. Быт'ће $dx=\frac{dz}{b}$, а $\int (a+bx)^n . dx = \frac{1}{b}\int z^n . dz = \frac{z^{n+1}}{b(n+1)}$ (1. обр. прећ. §-а), или ако садъ повратимо место z горню нћегову вредность,

$$17.) \quad \int (a+bx)^n . dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b\,(n+1)} .$$

2.) На истый начинъ налазимо и $\int x^{n-1} dx . (a+bx^n)^m$, при комъ є $x^{n-1}dx$, немотрећи на сталне чинителѣ b и n, диференціалъ одъ $a+bx^n$, броєви m и n притомъ были какви му драго.

Поставляюћи т. є. $a+bx^n=z$, слѣдує $x^{n-1}dx=\frac{dz}{bn}$,

и зато вопросный $\int x^{n-1}dx.(a+bx^n)^m=\frac{1}{bn}\int z^m dz=\frac{z^{m+1}}{bn(m+1)}$,

или ако повратимо вредность одъ z,

$$18.) \quad \int x^{n-1} dx\,(a+bx^n)^m = \frac{(a+bx^n)^{m+1}}{bn\,(m+1)} .$$

Поставляюћи овде $n=1$, и изменююћи m съ n, слѣдуе сасвимъ просто прећашный интегралъ.

3.) Диференціалећи $a + bx^n$ добыямо $bn \,.\, x^{n-1} \,.\, dx$, тако да стои

$$A\, x^{n-1} .\, dx = \frac{A}{bn} \cdot d\,(a + bx^n)\,,$$

и да због тога по V. правилу § 85. можемо рећи:

$$19.)\quad \int \frac{A\, x^{n-1} .\, dx}{a + bx^n} = \frac{A}{bn} \cdot l\,(a + bx^n)\,.$$

§ 88.

Требаю намъ интеграли $\int \frac{dx}{\sqrt{a \pm bx^2}}$ и $\int \frac{dx}{a \pm bx^2}$.

Ту опажамо лако, да є првый съ горњимъ знакомъ у именителю найвећма наликъ на 15., а съ дољнимъ знакомъ на 11. интегралъ §а 86.; другій є пакъ највећма наликъ на 12., съ горњимъ знакомъ, а на 16. съ дољнимъ. На те дакле интеграле трудимо се свести ій, и получуємо то слѣдующимъ путемъ. Вадимо у именителю a као заєдничкога чинителя, и ставлямо после $\frac{b}{a} x^2 = z^2$, т. є. $x = z \sqrt{\frac{a}{b}}$, дакле $dx = dz \,.\, \sqrt{\frac{a}{b}}$. Тиме є изразъ

$$\frac{dx}{\sqrt{a \pm bx^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a} \,.\, \sqrt{1 \pm \frac{b}{a} x^2}} = \frac{dz}{\sqrt{b} \,.\, \sqrt{1 \pm z^2}}$$

очевидно сведенъ на найпре споменута два образца, а

$$\frac{dx}{a \pm bx^2} = \frac{dx}{a\left(1 \pm \frac{b}{a} x^2\right)} = \frac{dz}{\sqrt{ab} \,.\, (1 \pm z^2)}$$

на 12. и 16., тако да є сада сасвимъ просто по 15. и 11. образцу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot l\,(z+\sqrt{1+z^2}),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot arc\,(sin = z)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot arc\,(cos = z)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot arc\,(tang = \frac{z}{\sqrt{1-z^2)}}\ ^*),$$

а по 12. и 16. образцу

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot arc\,(tang = z)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \cdot l \frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}},$$

$$\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \cdot l \frac{1+z}{1-z}.$$

Због тога, ако повратимо вредность $z = x\sqrt{\frac{a}{b}}$,

20.) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \left[l\,(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}) - l\sqrt{a} \right]$$ или

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot l\left(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx}\right),$$ ако $- \frac{l\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

приброимо одма неизвестномъ сталномъ броію C, —

---

*) Кадъ є $\sin = z$, онда є $\cos = \sqrt{1 - \sin^2} = \sqrt{1 - z^2}$, и зато

$$\text{tang} = \frac{\sin}{\cos} = \frac{z}{\sqrt{1-z^3}}.$$

21.) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \, arc\,(sin = x\sqrt{\frac{b}{a}})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot arc\,(cos = x\sqrt{\frac{b}{a}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \, arc\,(tang = \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a - bx^2}}),$$

22.) $$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot arc\,(tang = x\sqrt{\frac{b}{a}})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \cdot l \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{-b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{-b}}, \quad a$$

23.) $$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \cdot l \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} \cdot$$

§ 89.

1.) За интеграле $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx \pm cx^2}}$ и $\int \frac{dx}{a + bx \pm cx^2}$ ставлямо односно $x \pm \frac{b}{2c} = z$, т. є. $x = z \mp \frac{b}{2c}$, чимъ постає $a + bx \pm cx^2 = \left(a \mp \frac{b^2}{4c}\right) \pm cz^2$, а $dx = dz$, тако да є после

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{\left(a - \frac{b^2}{4c}\right) + cz^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{\left(a + \frac{b^2}{4c}\right) - cz^2}},$$

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \int \frac{dz}{\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)+cz^2},$$

$$\int \frac{dx}{a+bx-cx^2} = \int \frac{dz}{\left(a+\frac{b^2}{4c}\right)-cz^2},$$

првый очевидно сведенъ на онай подъ 20. (прећ. §), другій на 21., трећій на 22., а четвртый на 23.

Заменюючи дакле у овимъ образцима a съ $\left(a \pm \frac{b^2}{4c}\right)$, b са c, а x са z, слѣдує

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot l\left[2cz + \sqrt{(4ac-b^2)+4c^2z^2}\right.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot arc\left(sin = \frac{2cz}{\sqrt{4ac+b^2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot arc\left(cos = \frac{2cz}{\sqrt{4ac+b^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot arc\left(tang = \frac{2cz}{\sqrt{(4ac+b^2)-4c^2z^2}}\right),$$

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot arc\left(tang = \frac{2cz}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \cdot l \frac{\sqrt{b^2-4ac}-2cz}{\sqrt{b^2-4ac}+2cz},$$

$$\int \frac{dx}{a+bx-cx^2} = -\frac{1}{\sqrt{4ac+b^2}} \cdot l \frac{\sqrt{4ac+b^2}+2cz}{\sqrt{4ac+b^2}-2cz},$$

или ако место z узмемо надлежно $x \pm \frac{b}{2c}$,

24.) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} . l\,(2cx+b+2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} . l\left(\frac{2cx+b}{2\sqrt{c}} + \sqrt{a+bx+cx^2}\right),$$

25.) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, arc\left(sin = \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}}\, arc\left(cos = \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\, arc\left(tang = \frac{2cx-b}{2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx-cx^2}}\right),$$

26.) $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} . arc\left(tang = \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} . l \frac{\sqrt{b^2-4ac}-(2cx+b)}{\sqrt{b^2-4ac}+(2cx+b)},$$

27.) $$\int \frac{dx}{a+bx-cx^2} = \frac{1}{\sqrt{4ac+b^2}} . l \frac{\sqrt{4ac+b^2}+(2cx-b)}{\sqrt{4ac+b^2}-(2cx-b)}.$$

Одъ две вредности 26. интеграла стои прва за случай ако є $4ac > b^2$, а друга при $4ac < b^2$. Ако бы пакъ случайно было $4ac = b^2$, постаю оба израза безкрайни, за знакъ, да вопросный интегралъ у томъ случаю ніє трансцендентанъ. Ево одма увереня: кадъ є $b^2 = 4ac$, онда є $b = 2\sqrt{ac}$, а $a+bx+cx^2 = a+2\sqrt{ac}.x+cx^2$ $=(\sqrt{a}+x\sqrt{c})^2$, и зато у томъ случаю

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{a}+x\sqrt{c})^2} = -\frac{1}{\sqrt{c}.(\sqrt{a}+x\sqrt{c})}$$

доиста алгебрайска функція.

2.) Узимаюћи у обр. 24. $-\frac{1}{x}$ место x, дакле $\frac{dx}{x^2}$ место dx, и изменююћи после c съ α, $-b$ са β, а a са γ, слћдуе

28.) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot l\left[\frac{2\sqrt{\alpha}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x} - (2\alpha+\beta x)\right].$$

Истимъ начиномъ добыямо изъ образца 25.

29.) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{-\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot arc\left(sin = \frac{\beta x - 2\alpha}{x\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}}\right).$$

§ 90.

1.) Ако бы, съ намеромъ да изнаћемо $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$, у образцима 24. и 25. узели $c = 0$, добыли бы нуллу; али тай интегралъ, каошто ћемо одма видити, и ніе трансцендентанъ, но алгебрайскій.

По образцу 17. § 87. имамо просто $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \int (a+bx)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx = \frac{2}{b}(a+bx)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{b} \cdot \sqrt{a+bx}$. На истый добыямо $\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx}} = -\frac{2}{b}\sqrt{a-bx}$, тако да садъ уобште стои.

30.) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a \pm bx}} = \pm \frac{2}{b}\sqrt{a \pm bx}.$$

2.) Поставляюћи далћ у горньимъ образцима подъ 28. и 29., за $\int \frac{dx}{x\sqrt{\beta x+\gamma x^2}}$, $\alpha = 0$, постаю обе вредности истога интеграла безкрайне, за знакъ да тай интегралъ ніе трансцендентанъ, но алгебрайскій. И доиста ако у предходећемъ 30. интегралу узмемо $-\frac{1}{x}$, γ и $-\beta$ место x, a и b, слћдуе као алгебрайскій

31.) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{\pm\beta x+\gamma x^2}} = \mp\frac{2}{\beta x}\cdot\sqrt{\pm\beta x+\gamma x^2}$$

3.) Ако є $f(x)=a+bx\pm cx^2$, имамо $l\,f(x)=l\,(a+bx\pm cx^2)$, а $d\,l\,f(x)=\frac{b\pm 2cx}{f(x)}\,dx=\frac{b\,dx}{f(x)}\pm\frac{2cx\,.\,dx}{f(x)}$. Одтудъ пакъ слѣдуе $\frac{x\,dx}{f(x)}=\pm\frac{d\,l\,f(x)}{2c}\mp\frac{b\,dx}{2c\,f(x)}$, и зато

$$\int\frac{x\,dx}{f(x)}=\pm\frac{l\,f(x)}{2c}\mp\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{f(x)},$$ т. є.

32.) $$\int\frac{x\,dx}{a+bx\pm cx^2}=\pm\frac{l(a+bx\pm cx^2)}{2c}\mp\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{a+bx\pm cx^2},$$

образацъ, съ коимъ интегралъ лево, као вопросный, доводимо на познате подъ 26. и 27.

Садъ смо, очевидно, у станю изнаћи и интегралъ функціе вида

$$\frac{(a\pm bx)\,dx}{\alpha+\beta x\pm\gamma x^2}.$$

6.) Найпосле ако имамо изнаћи $\int\frac{ax^m\,dx}{(\alpha+\beta x)^n}$, ставлямо $\alpha+\beta x=z$, дакле $x=\frac{z-\alpha}{\beta}$, $x^m=\frac{(z-\alpha)^m}{\beta^m}$, а $dx=\frac{dz}{\beta}$. Тимъ быва вопросный, по реду

33.) $$\int\frac{ax^m\,dx}{(\alpha+\beta x)^n}=\frac{a}{\beta^{m+1}}\int\frac{(z-\alpha)^m dz}{z^n},$$

и добыямо га дакле у случаю ако є m цео положанъ брой, развіяюћи найпре $(z-\alpha)^m$ по биномномъ правилу, и делећи после све чланове тога степена са z^n, єръ тадъ смо га свели на интегралъ алгебрайскогъ сбира самы диференціалны монома, кои се сада лако налази помоћу правила I. и II. § 85. и 1. обр. § 86. — Да пакъ найпосле іошъ валя повратити горню вреднесть за z, разуме се по себи.

За особитый случай да є $m=0$, слѣдує изъ предходећегъ образца

$$34.)\quad \int \frac{a\,dx}{(\alpha+\beta x)^n} = \frac{a}{\beta}\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{a}{\beta\,(n-1)(\alpha+\beta x)^{n-1}}.$$

Особиты примера за упражняванѣ у употребляваню овы образаца неузимамо овде зато никаковы, єръ ћемо ій доцніє врло често и на найразличитіи начинъ употреблявати.

г.) Интеграленѣ алгебрайски функція целы раціоналны

§ 91.

Диференціалне функціе алгебрайске раціоналне целе све су вида

$$ax^{\alpha}\,dx + bx^{\beta}\,dx + cx^{\gamma}\,dx + \ldots,\ldots\ldots\ldots,$$

и ништа ніе лакше сада интегралити, но такову функцію, по правилама I и II. §85. и образцу 1. § 86. По тима имамо съ места

$$\int (ax^{\alpha}dx+bx^{\beta}dx+cx^{\gamma}dx+..) = a\int x^{\alpha}dx+b\int x^{\beta}dx+c\int x^{\gamma}dx+..$$

$$= \frac{ax^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{bx^{\beta+1}}{\beta+1}+\frac{cx^{\gamma+1}}{\gamma+1}+\cdot\cdot+C.$$

Н. п. $\int (1-2x+3x^2-7x^6)\,dx = x-x^2+x^3-x^7+C.$

Неимаюћи ништа више о томъ послу рећи, приступамо одма къ

д.) Интеграленю алгебрайски деловны функція.

§ 92.

Осимъ дояко већъ показаны оны образаца, кои се тичу таковы функція, имамо о њиовомъ интеграленю іошъ слѣдуюће приметити.

Дата диференціална деловна функція или є чиста или нечиста. Ако є нечиста добыямо, простомъ деобомъ броителя чрезъ именителя, место нѣ алгебрайскій сбиръ одъ єдне целе функціе и єдне деловне чисте; после чега имамо нѣнъ интегралъ по § 85. раванъ алгебрайскомъ сбиру интеграла те две функціе. Како пакъ интеграленѣ оне целе функціе неподлежи сада никаквой више тешкоћи, то є дакле притомъ само іошъ до тога стало, да видимо, како се налази интегралъ оне деловне чисте функціе, ако т. є. ніе случайно такова, да є нѣнъ интегралъ у єдномъ одъ пређе споменуты образаца већъ разрешенъ. Представимо ю съ $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Начинъ, коимъ изтражуємо интегралъ такове функціе, састои се уобште у томе, да є по упутству I. Ч. разлажемо у почастне разломке, и после ове интегралимо; при чему наравно валя разликовати понаособъ све могуће случаєве у смотреню рода именителѣвы чинителя. Подробніе дѣйствую о томе слѣдуюћи §§-и.

§ 93.

Ако се именитель $\varphi(x)$ састои изъ самы доистны нееднаки чинителя, онда є свакій вида $\frac{a}{\alpha+\beta x}$, и у томъ се дакле случаю вопросный $\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx$ састои изъ сбира самы интеграла вида $\int \frac{a\,dx}{a+\beta x}$, кои се лако налазе образцемъ 19. у § 87.

Ово и у знацима изражено, стои за поменутый случай

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int \frac{a_1\,dx}{\alpha_1+\beta_1 x} + \int \frac{a_2\,dx}{\alpha_2+\beta_2 x} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{a_1}{\beta_1}\cdot l(\alpha_1+\beta_1 x) + \frac{a_2}{\beta_2}\cdot l(\alpha_2+\beta_2 x) + \cdots\cdots$$

Н. п. ако є вопросна деловна функція

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1+2x^2}{2+3x-3x^2-2x^3} = \frac{1+2x^2}{(1-x)(2+x)(1+2x)},$$

коя се по § 107. I. Ч. састои изъ почастны разломака

$$\frac{1}{3(1-x)},\ \frac{-1}{2+x} \text{ и } \frac{1}{3(1+2x)},-$$ имамо

$$\int \frac{(1+2x^2)\,dx}{2+3x-3x^2-2x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1-x} - \int \frac{dx}{2+x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{1+2x}$$

$$= -\frac{1}{3}l(1-x) - l(2+x) + \frac{1}{3}l(1+2x) + C.$$

§ 94.

Ако именитель $\varphi(x)$ има и **прости мнимы**, дакле **квадратны доистны, неједнаки** чинителя вида $(x-m)^2+n^2$, онда у интегралу вопросне функције $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ добыямо, осимъ интеграла прећашњега вида, іошъ и овога: $\int \frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2}$.

Овакавъ интегралъ добыямо лако, поставляюћи $x-m=z$, єръ тиме быва $x=m+z$, $dx=dz$, и зато

$$\int \frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2} = \int \frac{[(a+bm)+bz]\,dz}{n^2+z^2} = \int \frac{(a+bm)\,dz}{n^2+z^2} + \int \frac{bz\,dz}{n^2+z^2}$$

$$= (a+bm)\int \frac{dz}{n^2+z^2} + b\int \frac{z\,dz}{n^2+z^2},$$

тако да после првый одъ ова два интеграла десно можемо изнаћи по образцу 22. § 88., а другій по мало пре споменутомъ 19. образцу § 87. — Подвргаваюћи ій тима образцима налазимо

$$(a+bm)\int\frac{dz}{n^2+z^2}=\frac{a+bm}{n}\cdot arc\,(tang=\frac{z}{n}),\ \text{а}$$

$$b\int\frac{z\,dz}{n^2+z^2}=\frac{b}{2}\cdot l\,(n^2+z^2),\ \text{и зато}$$

$$\int\frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2}=\frac{a+bm}{n}\cdot arc\,(tang=\frac{z}{n})+\frac{b}{2}\cdot l\,(n^2+z^2),$$

или, ако повратимо место z нѣгову вредность $x-z$, свакій интегралъ у вопросномъ случаю, вида

$$\int\frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2}=\frac{a+bm}{n}\cdot arc\left(tang=\frac{x-m}{n}\right)+b\,.\,l\sqrt{(x-m)^2+n^2}.$$

Н. п. ако є вопросна деловна функція

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{x^2+x-1}{x^3-4x^2+9x-10}=\frac{x^2+x-1}{(x-2)[x-(1+2\sqrt{-1})]\cdot[x-(1-2\sqrt{-1})]}$$

$$=\frac{x^2+x-1}{(x-2)(x^2-2x+5)}=\frac{x^2+x-1}{(x-2)\,[(x-1)^2+4]},$$

коя се, по 109. §-у I. Ч., састои изъ доистны почастны разломака $\frac{1}{x-2}$ и $\frac{3}{x^2-2x+5}=\frac{3}{(x-1)^2+4}$, — имамо по горнѣму, због $a=1$, $b=0$, $m=1$, $n=2$ при интегралу другогъ почастногъ разломка,

$$\int\frac{(x^2+x-1)\,dx}{x^3-4x^2+9x-10}=\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}$$

$$=l\,(x-2)+\frac{3}{2}\,arc\left(tang=\frac{x-1}{2}\right)+C.$$

На истый начинъ као овде $\int\frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2}$, определюю се, обзиромъ на §§ 194. — 198. I. Ч., и интеграли вида $\int\frac{dx}{x^n\pm a^n}$ и $\int\frac{x^m dx}{x^n\pm a^n}$, ако су броєви m и n *цели положни.*

§ 95.

Ако именитель $\varphi(x)$ има еднаки просты доистны чинителя, онда вопросный интегралъ садржат'ће и интеграле вида $\int \frac{adx}{(\alpha+\beta x)^n}$, кое лако разрешавамо образцемъ 17. § 87.

По томъ е образцу свакій таковый

$$\int \frac{adx}{(\alpha+\beta x)^n} = \frac{a}{b(n-1)(\alpha+\beta)^{n-1}} + C.$$

Н. п. ако е вопросна деловна функція.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{2x^2-x+2}{x^2.(x-1)(2x+1)^2},$$

коя се састои изъ почастны разломака $-\frac{2}{x^2}, \frac{7}{x}, \frac{1}{3(x-1)}, -\frac{8}{(2x+1)^2}$ и $\frac{-44}{3(2x+1)}$, — имамо

$$\int \frac{(2x^2-x+2)dx}{x^2.(x-1)(2x+1)^2} = -2\int\frac{dx}{x^2} + 7\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}$$
$$-8\int\frac{dx}{(2x+1)^2} - \frac{44}{3}\int\frac{dx}{2x+1}.$$

Првый одъ десны интеграла определює се по обр. 1., а другій обр. 4. § 86., — трећій и последньій по обр. 19. § 87., а четвртый пређе поменутимъ образцемъ 17. истога §-а.

Поступаюћи съ њима по тима образцима, слѣдує

$$\int \frac{(2x^2-x+2)dx}{x^2(x-1)(2x+1)^2} = \frac{2}{x} + 7lx + \frac{1}{3}l(x-1) + \frac{4\,^{*)}}{2x+1}$$
$$-\frac{22}{3}l(2x+1)$$

---

*) Узимаюћи у горнѣмъ образцу за $\int\frac{dx}{(2x+1)^2}$, $a=1$, $\alpha=1$, $\beta=2$, $n=2$, быва $\int\frac{dx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2(1-2)(1+2x)^{2-1}} = -\frac{1}{2(1+2x)}$.

§ 96.

Найпосле ако именитель $\varphi(x)$ има и **еднаки** просты **мнимы**, дакле **еднаки квадратны доистны** чинителя, онда наилазимо іошъ на интеграле вида $\int \frac{(a+bx)dx}{[(x-m)^2+n^2]^r}$.

Свакій таковый интегралъ доводи се, истомъ замеромъ као у § 94., на интегралъ вида

$$\int \frac{(\alpha+bz)\,dz}{(z^2+n^2)^r} = \alpha \int \frac{dz}{(z^2+n^2)^r} + b \int \frac{z dz}{(z^2+n^2)^r}.$$

Последньій одъ ова два интеграла може се лако изнаћи по обр. 18. § 97.; како се пакъ добыя онай првый, то ћемо видити текъ доцніе.

е.) Интеграленћ алгебрайски ирраціоналны функція.

§ 97.

Осимъ дотичны образаца у §§-а 86. — 90., имамо іошъ приметити уобште, да се интеграленћ ирраціоналны диференціалны функція сматра као већъ готовъ посао, ако смо само у стаю дати имъ видъ раціоналанъ. Съ тога быће задатакъ слѣдующи §§-а показати, како се то постизава у некимъ случаєвима, єръ да се за то немогу поставити обшта правила, разуме се лако по себи.

§ 98.

1.) Ако се у датой диференціалной функціи, поредъ раціоналны израза налази само ирраціоналный овакавъ: $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$, — онда валя ставити $a+bx=z^n$, дакле $x=\frac{z^n-a}{b}$, а $dx=\frac{nz^{n-1}dz}{b}$, па ће нова функція, тиме добывена, быти раціонална.

Н. п. ако имамо $\int(2x^2-x+2)\,dx\sqrt[5]{1-2x}$, па поставимо $1-2x=z^5$, — постае $x=\frac{1-z^5}{2}$, $dx=-\frac{5}{2}z^4dz$, $2x^2-x+2=\frac{1}{2}(4-z^5+z^{10})$, дакле $\int(2x^2-x+2)\,dx\sqrt[5]{1-2x}$ $=-\frac{5}{4}\int(4-z^5+z^{10})\,z^5\,dz=-\frac{5}{4}\int(4z^5-z^{10}+z^{15})\,dz$ **раціоналанъ, и по правилама I. и II. § 85. и обр. 1. § 86.** равanъ $-\frac{5}{4}z^6\left(\frac{2}{3}-\frac{z^5}{11}+\frac{z^{10}}{16}\right)=-\frac{5}{2112}z^6(352-48z^5+33z^{10})$, — а ако іошъ повратимо вредность $z=(1-2x)^{\frac{1}{5}}$

$$\int(2x^2-x+2)\,dx\cdot\sqrt[5]{1-2x}=-\frac{5}{2112}(1-2x)\,[352-48(1-2x)+33(1-2x)^2]\sqrt[5]{1-2x}.$$

2.) Ако пакъ у датой функціи имамо осимъ $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$ іошъ и $(a+bx)^{\frac{r}{s}}$, онда треба метнути $a+bx=z^{ns}$, дакле $x=\frac{z^{ns}-a}{b}$, а $dx=\frac{ns}{b}\cdot z^{ns-1}\,dz$, и тиме быт'ће опетъ нова функція раціонална.

Н. п. за $\int\frac{\sqrt{x}-2x\sqrt[3]{x}}{2x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ ставлямо $x=z^6$, дакле $dx=6z^5dz$, $\sqrt{x}=z^3$, $\sqrt[3]{x}=z^2$, а $\sqrt[3]{x^2}=z^4$, чимъ быва вопросный.

$$\int\frac{\sqrt{x}-2x\sqrt[3]{x}}{2x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}\,dx=-6\int\frac{2z^9-z^4}{2z^5+1}\,dz$$

очевидно раціоналанъ.

Овай новый интегралъ израђенъ, показуе се равanъ $\int\left(z^4-\frac{2z^4}{2z^5+1}\right)dz=\frac{z^5}{5}-\frac{1}{5}l(2z^5+1)$, и зато ако заменемо и после вредность $z=\sqrt[6]{x}$ повратимо:

$$\int\frac{\sqrt{x}-2x\sqrt[3]{x}}{2x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\frac{6}{5}\left[l(2\sqrt[6]{x^5}+1)-\sqrt[6]{x^5}\right]+C.$$

§ 99.

Поступаюћи по овимъ упутствама добыямо сасвимъ лако

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \cdot \sqrt{a+bx},$$ **каогодъ у § 90. подъ 30.,**

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b^2} \cdot \left[\frac{1}{3}(a+bx) - a\right] \cdot \sqrt{a+bx}$$

$$= -\frac{2}{3b^2}(2a-bx) \cdot \sqrt{a+bx},$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b^3}\left[\frac{1}{5}(a+bx)^2 - \frac{2}{3}a(a+bx) + a^2\right] \cdot \sqrt{a+bx}$$

$$= \frac{2}{15b^3}(8a^2 - 4abx + 3b^2x^2) \cdot \sqrt{a+bx},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot l \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}}.$$

Како є пакъ $\sqrt{a+bx} = \frac{a+bx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{a}{\sqrt{a+bx}} + \frac{bx}{\sqrt{a+bx}}$,

а $x\sqrt{a+bx} = \frac{ax+bx^2}{\sqrt{a+bx}} = \frac{ax}{\sqrt{a+bx}} + \frac{bx^2}{\sqrt{a+bx}}$, **то можемо садъ, каошто є лако увидити, сасвимъ просто опредлити и интеграле** $\int dx\sqrt{a+bx}$ **и** $\int x\sqrt{a+bx}$.

§ 100.

1.) Ако се у датой диференціалной функціи наоди произвольный, н. п. $\sqrt[m]{\left(\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}\right)^n}$, **постат'ће раціонална, чимъ ставимо** $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x} = z^n$.

Н. п. ако є $\int \left[x-(2+x)\sqrt[3]{\frac{2-x}{1+2x}}\right]dx$, морамо ставити $\frac{2-x}{1+2x}=z^3$, дакле $x=\frac{2-z^3}{1+2z^3}$, а $dx=9\,\frac{z^2dz}{(1+2z^3)^2}$; тиме постає

$$\int\left[x-(2+x)\sqrt[3]{\frac{2-x}{1+2x}}\right]\cdot dx=9\int\frac{z^2dz(2-4z-z^3-3z^4)}{(1+2z^3)^3}$$

$$=9\int\frac{(2z^2-4z^3-z^5-3z^6)\,dz}{(1+2z^3)^3},$$

очевидно раціоналанъ. Разрешавамо га на тай начинъ, да найпре разложимо $1+2z^3$ по I. Ч. § 104. у просте чинителѣ, после деловну функцію $\frac{2z^2-4z^3-z^5-3z^6}{(1+2z^3)^2}$ познатимъ начиномъ у почастне разломке, а далѣ поступамо по § 96.; после свега тога пакъ враћамо за z нѣгову горню вредность $\sqrt[3]{\frac{2-x}{1+2x}}$.

2.) Ако се пакъ налазе више корена одъ $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}$, н. п. $\sqrt[m]{\left(\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}\right)^n}$ и $\sqrt[r]{\left(\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}\right)^s}$, онда преводимо дату функцію у другу раціоналну тиме, што мећемо $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}=z^{mr}$.

Н. п. ако имамо интегралити функцію

$$\frac{x\sqrt[3]{(1+x)^2}\cdot\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}\cdot\sqrt[3]{(1-x)^2}-\sqrt[3]{(1+x)}\cdot\sqrt[6]{(1-x)^5}}\,dx,$$

делимо найпре броителя и именителя, да бы ю довели на споменутый случай, са $\sqrt{(1-x)}\cdot\sqrt[3]{(1-x)^2}$. Тиме быва одъ нѣ

$$\frac{x\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}}\,dx.$$ Садъ ставлямо $\frac{1+x}{1-x}=z^6$, дакле $x=\frac{z^6-1}{z^6+1}$, а $dx=\frac{12z^5dz}{(z^6+1)^2}$, чимъ постає вопросный интегралъ $=\int\frac{(z^{12}+z^{11}+z^{10}+z^9+z^8+z^7)\,dz}{(z^6+1)^3}$, очевидно раціоналанъ.

Како пакъ треба далѣ поступати, за цело садъ више ніе потребно толковати.

3.) У станю смо садъ интегралити и такове функціе, коє садрже више корена одъ $a+bx^n$ или одъ $\frac{a+bx^n}{\alpha+\beta x^n}$, н. п. $(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$ и $(a+bx)^{\frac{t}{u}}$ или $\left(\frac{a+bx^n}{\alpha+\beta x^n}\right)^{\frac{r}{s}}$ и $\left(\frac{a+bx^n}{\alpha+\beta x^n}\right)^{\frac{t}{u}}$, — само ако поредъ тога имаю іошъ заєдничкога чинителя x^{n-1}; єръ прелазе у томъ случаю съ места у преѣе толковане подъ 1. и 2., чимъ само метнемо $x^n=z$.

§ 101.

Ако дата диферепціална функція осимъ $\sqrt{a+bx+cx^2}$ несадржи никакавъ другій ирраціоналный брой, али тай єданъ макаръ и вишепута, — онда можемо є превести у раціоналну функцію на єданъ одъ слѣдуюћа три начина.

1.) Ставлямо $\sqrt{a+bx+cx^2}=x\sqrt{c}+z$, дакле $x=\frac{z^2-a}{b-2z\sqrt{c}}$, а $dx=-2\frac{z^2\sqrt{c}-bz+a\sqrt{c}}{(b-2z\sqrt{c})^2}dz$, чимъ постає дата функція раціонална, и може се после интегралити по некомъ одъ доякошньи §§-а.

Овако поступа се нарочно у случаю, кадъ є c положанъ брой.

2.) Мећемо $\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{a}+xz$, дакле $x=\frac{b-2z\sqrt{a}}{z^2-c}$, а $dx=2\frac{z^2\sqrt{a}-bz-c\sqrt{a}}{(z^2-c)^2}dz$.

Овай начинъ употребљава се, кадъ є брой a положанъ. — Найпосле

3.) Разлажемо найпре $a+bx+cx^2$ у корене чинителѣ (Ч. I. § 104.); притомъ налазимо $x=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}=\alpha$ и $x=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}=\beta$, тако да є после $a+bx+cx^2=c.(x+\alpha)(x+\beta)$; — затимъ ставлямо $(x+\alpha)(x+\beta)=(\alpha+x)^2.z^2$, дакле $\sqrt{a+bx+cx^2}=(\alpha+x).z\sqrt{c}$, $x=\frac{\beta-\alpha z^2}{z^2-1}$, а $dx=\frac{2(\alpha-\beta)zdz}{(z^2-1)}$. Съ овимъ x постає $\sqrt{a+bz+cx^2}=-\frac{(\alpha-\beta)z^2}{z^2-1}$, а съ овомъ вредности и нађеномъ за dx, вопросный интегралъ раціоналанъ.

Овай трећій начинъ може се употребити, быо брой c положанъ или одречанъ, само ако су броєви α и β притомъ доистни.

Приметити само іошъ ваља, да бы при првомъ начину рачунъ нешто простіи быо, кадъ бы пре свега извукли $\sqrt{c}$ као заедничкогъ чинителя, и после бы метнули $\frac{b}{c}=m$, а $\frac{a}{c}=n$; єръ тиме имали бы место $\sqrt{a+bx+cx^2}$, $\sqrt{n+mx+x^2}$, а то треба ставити само $=x+z$. — Подобно быо бы при другомъ начину рачунъ простіи, кадъ бы $\sqrt{a}$ као заедничкогъ чинителя извадили, и после $\frac{b}{a}=p$, а $\frac{c}{a}=q$ поставили; єръ тиме бы место $\sqrt{a+bx+cx^2}$ имали $\sqrt{1+px+qx^2}$, кое после валя поставити само $=1+xz$.

Напослѣдку по себи разуме се, да ћемо овимъ истимъ начинима вопросну цѣль іошъ и у томъ случаю постићи, ако се буде налазіо $\sqrt{a+bx+cx^2}$ у другомъ каквомъ степену.

§ 102.

1.) Ако се у датой функціи налази поредъ $\sqrt{a+bx}$ іошъ и $\sqrt{\alpha+\beta x}$, ставлямо $\sqrt{a+bx} = z\sqrt{\alpha+\beta x}$, дакле $a+bx = z^2(\alpha+\beta x)$, $x = \frac{\alpha z^2 - a}{b-\beta z^2}$, а $dx = \frac{2(\alpha b - a\beta) z\,dz}{(b-\beta z^2)^2}$.

Тиме бываю, каошто видимо, броєви x и dx, изражени чрезъ z и dz, раціонални, али се после зато место $\sqrt{a+bx}$ налази $z\sqrt{\alpha+\beta x}$, осимъ што $\sqrt{\alpha+\beta x}$ може стаяти више пута.

Заменююћи затимъ x съ нѣговомъ вредности, израженомъ чрезъ z, постає $\sqrt{\alpha+\beta x} = \frac{\sqrt{\alpha b - a\beta}}{\sqrt{b-\beta z^2}}$, чимъ є вопросный интегралъ, због у нѣму налазећегъ се $\sqrt{b-\beta z^2}$, сведенъ на случай прећашнѣгъ §-а.

Тако н. п. ако є вопросна функція $\frac{(x-1)\sqrt{x+1}-x}{(x+1)\sqrt{x-1}+x} \times dx$, ставляюћи $\sqrt{x+1} = z\sqrt{x-1}$, дакле $x = \frac{z^2+1}{z^2-1}$, $x-1 = \frac{2}{z^2-1}$, $x+1 = \frac{2z^2}{z^2-1}$, а $dx = -\frac{4z\,dz}{(z^2-1)^2}$, — имамо нову функцію одъ z:

$$-4\,\frac{2z^2\sqrt{2}-z(z^2+1)\sqrt{z^2-1}}{(z^2-1)^2.[2z^2.\sqrt{2}+(z^2+1)\sqrt{z^2-1}]}\cdot dz,$$

коя због $\sqrt{z^2-1}$, подлежи предходећемъ §-у.

Ставляюћи дакле, по тога §-а 3. упутству, $z^2-1=(z+1)(z-1)=(z-1)^2.v^2$, т. є. $z=\frac{v^2+1}{v^2-1}$, $z^2=\frac{(v^2+1)^2}{(v^2-1)^2}$, $z^2+1=2\frac{v^4+1}{(v^2-1)^2}$, $z^2-1=4\frac{v^2}{(v^2-1)^2}$, а $dz=-4\frac{v\,dv}{(v^2-1)^2}$, — добыямо нову функцію одъ v,

$$\frac{(v^2-1)(v^4-1)^2.\sqrt{2-2v(v^8-1)}}{v^3.[(v^4-1)(v^2+1)\sqrt{2+2v(v^4+1)}}\cdot dv,$$

коя є раціонална, и моћи се зато лако интегралити по доякопньимъ §§-ма.

2.) Ако се пакъ у датой диференціалной функціи налазе квадратни корени одъ разны функпія другога степена, онда се наилази на интегралъ функціє

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}},$$

гди $f(x)$ представля какву нибудъ алгебрайску функцію, — кои се врло тешко, и у већой части случаєва никако неможе ураціоналити.

Такови интеграли називаю се **елиптични трансценденти**, а занимали су се съ њима найзнатніи аналитици, и одъ старіи *), и одъ млађи. Али како се о њима уобште іошъ врло мало зна, а у особите случаєве упуштаюћи се морали бы прекорачити границе овога дела: то се морамо за сада задовольити само съ овомъ напоменомъ.

---

*) Одъ овы нарочито Айлеръ, Лагранжъ и Лежандръ, а одъ новіи особито Якоби и Абелъ. — Лежандръ назива елиптичнимъ трансцендентима све пнтеграле садржане у

$$\int\frac{A+B\sin^2 z}{C+D\sin^2 z}\cdot\frac{dz}{\sqrt{1-e^2\sin^2 z}},$$

кои се добыя известнимъ некимъ преображенћмъ горнћга.

ж.) Интеграленѣ израза $x^m . dx (a + bx^n)^{\frac{r}{s}}$.

§ 103.

Докъ є при изразу $x^m . dx (a + bx^n)^v$ изложитель v положанъ или одречанъ цео брой, дотле интеграленѣ истога израза, ма какви поредъ тога были изложителѣи m и n, неподлежи никаквой тешкоћи. Єръ, ако при положномъ изложителю v развіемо $(a + bx^n)^v$ по биномномъ правилу, и све чланове тога степена после помложимо са $x^m dx$, имамо место вопроснога интеграла интегралъ алгебрайскогъ сбира самы монома, кои є, каошто знамо, лако разрешенъ. Ако є пакъ изложитель v одречанъ, онда валя само датый изразъ разложити у почастне разломке, и после далѣ по § 95. поступати.

Изъ тій узрока говорит'ћемо овде о интограленю израза $x^m . dx (a + bx^n)^v$ само у томъ случаю, ако є биномъ $(a + bx^n)^v$ ирраціоналанъ, т. є. ако є изложитель v чистый разломакъ $\frac{r}{s}$.

§ 104.

Осимъ у она два особита случая, гди є или $m = 0$ а $n = 1$, или є $x^m dx$ диференціалъ одъ x^n, коє смо у § 87. већъ разрешили подъ образцима 17. и 18., може се вопросный интегралъ іошъ у два случая определити као раціоналанъ. Кадъ и како? видит'ћемо, докъ се овде найпре уверимо, да при томъ послу изложителѣ m и n можемо предпоставити као целе, иначе или положне или одречне, єръ се други случаєви у томъ обзиру сви даю свести на тай єданъ.

Найпре узмимо да є m положанъ или одречанъ разломакъ $\frac{\alpha}{\beta}$, т. є. $m = \pm \frac{\alpha}{\beta}$, а n положанъ разломакъ $\frac{\gamma}{\delta}$, дакле вопросный изразъ вида $x^{\pm\frac{\alpha}{\beta}} . dx \left(a + bx^{\frac{\gamma}{\delta}}\right)^{\frac{r}{s}}$.

Поставляюħи $x = z^{\beta\delta}$, быва $x^{\pm\frac{\alpha}{\beta}} = z^{\pm\alpha\delta}$, $x^{\frac{\gamma}{\delta}} = z^{\beta\gamma}$;
$dx = \beta\delta . z^{\beta\delta-1} . dz$, а съ тима вредностима

$$\int x^{\pm\frac{\alpha}{\beta}} . dx\,(a+bx^{\frac{\gamma}{\delta}})^{\frac{r}{s}} = \beta\delta \int z^{\delta(\beta\pm\alpha)-1} . dz\,(a+bz^{\beta\gamma})^{\frac{r}{s}},$$

у комъ су изложительи одъ z очевидно цели броеви, првый положанъ или одречанъ, а другій положанъ.

Сада нека є, поредъ пређашнѣга m изложитель $n = -\frac{\gamma}{\delta}$, т. є. одречанъ разломакъ.

Стављаюħи у томъ случаю найпре $x = \frac{1}{z}$, быва $x^{\pm\frac{\alpha}{\beta}} = z^{\pm\frac{\alpha}{\beta}}$, $x^{-\frac{\gamma}{\delta}} = z^{\frac{\gamma}{\delta}}$, $dx = -\frac{dz}{z^2}$, чимъ є вопросный

$$\int x^{\pm\frac{\alpha}{\beta}} . dx\,(a+bx^{-\frac{\gamma}{\delta}})^{\frac{r}{s}} = -\int z^{-\frac{2\beta\pm\alpha}{\beta}} dz\,(a+bz^{\frac{\gamma}{\delta}})^{\frac{r}{s}}$$

очевидно сведенъ на пређашньій случай, дакле посредно опетъ на онай са целимъ изложительима, тако да сада основано можемо предпоставити изложитель m и n у испытати имаюħемъ се интегралу израза $x^m dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$, као целе броєве.

§ 105.

1.) Узмимо $a + bx^n = z^s$. Постає $x = b^{-\frac{1}{n}} . (z^s - a)^{\frac{1}{n}}$,
$x^m = b^{-\frac{m}{n}} . (z^s - a)^{\frac{m}{n}}$, $dx = \frac{sb^{-\frac{1}{n}}}{n} . z^{s-1} . dz\,(z^s - a)^{\frac{1}{n}-1}$, а съ тима вредностима

$$\int x^m dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \cdot \int z^{r+s-1} . dz\,(z^s - a)^{\frac{m+1}{n}-1},$$

изъ чега є видити, да ће новый интегралъ быти раціоналанъ, ако є случайно $\frac{m+1}{n}$ цео, положанъ или одречанъ брой, и моћи ће се у томъ случаю лако определити єднимъ одъ споменута два начина у § 103.

Н. п. ако є датый изразъ $x^3dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, имамо $n=2$, $a+bx^n=2-x^2=z^2$, $r=1$, $s=2$, $a=2$, $b=-1$, дакле вопросный интегралъ по горнћмъ образцу,

$$\int x^3dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}}=\int z^2dz\,(z^2-2)$$ раціоналанъ,

а то зато што є $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2=$ цео брой. Израћенъ є $=\frac{z^5}{5}-\frac{2z^3}{3}$, тако да ако повратимо вредность $z=\sqrt{2-x^2}$, имамо

$$\int x^3\,dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}}=(2-x^2)\left[\frac{1}{5}\,(2-x^2)-\frac{2}{3}\right]\cdot\sqrt{2-x^2}+C.$$

2.) Извуцимо x^n као заєдничкогъ чинителя бинома $(a+bx^n)$, и поставимо затимъ $ax^{-n}+b=z^s$. Быт'ће

$x=a^{\frac{1}{n}}.(z^s-b)^{-\frac{1}{n}}$, $x^{m+\frac{nr}{s}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}.(z^s-b)^{-\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}$, $dx=-\frac{s}{n}\times$

$\times a^{\frac{1}{n}}.(z^s-b)^{-\frac{n+1}{n}}.z^{s-1}.dz$, а съ тима вредностима вопросный

$$\int x^m dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=\int x^{m+\frac{nr}{s}}.dx\,(ax^{-n}+b)^{\frac{r}{s}}$$

$$=-\frac{s}{n}.a^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}}\int z^{r+s-1}.dz\,(z^s-b)^{-\left(\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}\right)-1}.$$

Овай интегралъ, очевидно, быт'ће раціоналанъ, ако є случайно $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}$ цео брой, и моћи ће се разрешити по єдномъ одъ споменута два начина у § 103.

Н. п. ако є датый изразъ

$$\frac{dx}{x^2.\sqrt{2-x^2}} = x^{-2}.dx\,(2-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

имамо после извлаченя броя x^2, као заєдничкога чинителя бинома $2-x^2$, $m=-2$, $n=2$, $2x^{-2}-1=z^2$, $a=2$, $b=-1$, $r=-1$, $s=2$, дакле вопросный интегралъ по горнѣмъ образцу

$$\int \frac{dx}{x^2.\sqrt{2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int dz = -\frac{1}{2}z,$$ **раціоналанъ,**

зато што є $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=\frac{-2+1}{2}-\frac{1}{2}=-1$ **цео брой.**

Враћаюћи вредность $z=\sqrt{2x^{-2}-1}=\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}$, **имамо коначно**

$$\int \frac{dx}{x^2.\sqrt{2-x^2}} = -\frac{\sqrt{2-x^2}}{2x}.$$

§ 106.

За упражненѣ испытаймо, спадаюли

$$\int \frac{dx}{x^3.\sqrt[3]{1+x^3}}$$ **и** $$\int \frac{dx\sqrt{1+2x}}{x}$$

у кои одъ изложена два особита случая?

При првомъ є $m=-3$, $n=3$, $r=-1$, $s=3$, $\frac{m+1}{n}=\frac{-3+1}{3}=-\frac{2}{3}$, **збогъ чега се тай интегралъ по првомъ начину предходећегъ §а неможе разрешити, али га, збогъ** $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-1$, **можемо по ономъ другомъ. По тога начина обштемъ образцу, обзиромъ на то да є** $a=1$ **и** $b=1$, **слѣдує**

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{1+x^3}} = -\int z\,dz = -\frac{z^2}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} + C.$$

При другомъ є интегралу $m=-1$, $n=1$, $r=1$, $s=2$, дакле $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{1} = 0$, а $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, збогъ чега истый интегралъ можемо добыти по првомъ начину, никако пакъ по другомъ. Обштій образацъ првога начина дає, збогъ $a=1$ и $b=2$,

$$\int \frac{dx\sqrt{1+2x}}{x} = 2\int \frac{z^2\,dz}{z^2-1} = 2\int (dz + \frac{dz}{z^2-1}) = 2\,(z - \int \frac{dz}{1-z^2})$$

$$= 2z - l\frac{1+z}{1-z} = 2\sqrt{1+2x} - l\frac{1+\sqrt{1+2x}}{1-\sqrt{1+2x}} + C.$$

§ 107.

Помоћу овы §§-а, у § 103. споменуты образаца §-а 95. и дотичны упутства за интеграленѣ ирраціоналны функція, у станю смо врло млого интеграла вопроснога ирраціоналногъ вида на прекій начинъ превести у раціоналне, и као такове у крайной форми определити; али несравнѣно више случаєва остаю, гди то или никако ніє могуће, или само са врло великимъ трудомъ. Тога ради поставит'ћемо у слѣдующему, нарочно за такове случаєве, іошъ неколико образаца, съ коима вопросный интегралъ доводимо на друге истога вида, али у коима изложитель m, или изложитель $\frac{r}{s}$, или обадва бываю све простіи, докъ се найпосле недоће до таквогъ интеграла, кои є или већъ познатъ, или се може изнаћи на єданъ одъ дояко познати начина'.

§ 108.

1.) Очевидно є $x^m . dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = x^{m-n+1} . x^{n-1} . dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$.

Ставляюћи у III. правилу § 85., по комъ є

$$\int \varphi(x)\, df(x) = \varphi(x) f(x) - \int f(x)\, d\varphi(x),$$

$\varphi(x) = x^{m-n+1}$, а $df(x) = x^{n-1}.dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$, слѣдує због

$$f(x) = \int x^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{bn\,(r+s)}.\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$$ (§ 87. обр. 18.), а $d\varphi(x) = (m-n+1)\,x^{m-n}.dx$, —

$$\int x^m.dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{bn\,(r+s)}.x^{m-n+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$$

$$-\frac{s(m-n+1)}{bn\,(r+s)}\int x^{m-n}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}\ldots$$ (α.,

или због $x^{m-n}.dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1} = x^{m-n}.dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}.(a+bx^n) =$

$$ax^{m-n}.dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} + bx^m.dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1},$$

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{bn(r+s)}.x^{m-n+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$$

$$-\frac{as\,(m-n+1)}{bn(r+s)}\int x^{m-n}.dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$$

$$-\frac{s\,(m-n+1)}{n\,(r+s)}\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}},$$

најпосле ако надлежно скратимо,

$$\int x^m.dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{b\,[nr+s(m+1)]}\,x^{m-n+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$$

$$-\frac{as\,(m-n+1)}{b\,[nr+s(m+1)]}.\int x^{m-n}.dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}\ldots.$$ (I.

2.) Изъ овогъ образца последньій интегралъ определююћи слѣдує

$$\int x^{m-n}.dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{x^{m-n+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}}{a\,(m-n+1)}$$

$$-\frac{b\,[nr+s(m+1)]}{as\,(m-n+1)}\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}},$$

а одтудъ опетъ, ако место m узмемо $m+n$,

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=\frac{x^{m+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}}{a\,(m+1)}$$

$$-\frac{b[nr+s(m+n+1)]}{as\,(m+1)}\int x^{m+n}.\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}\quad\ldots\ldots\quad(\text{II.}$$

3.) Горньій образацъ α.), ако у нѣму найпре узмемо $\frac{r}{s}-1$ место $\frac{r}{s}$, а $m+n$ место m, и после определимо $\int x^m\,dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$, — даѥ

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=\frac{x^{m+1}.a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{m+1}$$

$$-\frac{bnr}{s\,(m+1)}\cdot\int x^{m+n}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}-1}\quad\ldots\ldots\quad(\beta.$$

Одовудъ пакъ, изражаваюћи bx^{m+n} овако: $x^m.bx^n=$ $=x^m.[(a+bx^n)-a]=x^m.(a+bx^n)-ax^m$, добыямо

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=\frac{x^{m+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{m+1}$$

$$-\frac{nr}{s\,(m+1)}\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$$

$$+\frac{anr}{s\,(m+1)}\cdot\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}-1},$$

а ако надлежно скратимо,

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=\frac{s\,x^{m-1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{s\,(m+1)+nr}$$

$$+\frac{anr}{s(m+1)+nr}\cdot\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}-1}\ldots\quad(\text{III.}$$

4.) Найпосле ако изъ овогъ образца определимо десный интегралъ и после изменимо $\frac{r}{s}$ са $\frac{r}{s}+1$, слѣдуѥ

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=-\frac{s\,x^{m+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}}{an\,(r+s)}$$

$$+\frac{s(m+n+1)+nr}{an\,(r+s)}\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}\quad\ldots\quad(\text{IV.}$$

§ 109.

Одъ изнађены овы образаца служи I. за умалявање положногъ, а II. за увећаванѣ одречногъ изложителя m, кадъ є изложитель $\frac{r}{s}$ у обзиру на крайньій интеграл сходанъ; — III. є за умаляванѣ положногъ, а IV. за увећаванѣ одречногъ изложителя $\frac{r}{s}$, у случаю ако є изложитель m за крайньій интегралъ удесанъ.

Ако треба изложителя m умалявати, и уєдно изложителя $\frac{r}{s}$ увећавати, или обратно овога умалявати а онога увећавати, могу у млогимъ случаєвима врло добро послужити споредни горньи образци подъ α.) и β.).

Догодитѣе се при употребляваню вопросны образаца, да именительи у десной части постаю равни нули, и зато дотичный образацъ неупотребанъ; но на срећу се то башъ при таковимъ случаєвима появлює, гди се вопросный интегралъ другимъ некимъ пречимъ путемъ лако доводи или на интегралъ монома, или на интегралъ раціоналногъ каквогъ разломка, тако дакле да оне образце и непотребуємо.

За упражненѣ у употребляваню исты образаца узмимо одма неколико

Примера.

§ 110.

1.) $\int x^5 . dx\,(2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = ?$

Ако у образцу I. метнемо $m = 5$, $n = 2$, $r = 1$, $s = 2$, $a = 2$, $b = -1$, слѣдує

$$\int x^5 . dx\,(2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{7} x^4 . (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{7} \int x^3\, dx\,(2 - x^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Са $m=3$ поредъ исты други вредностій, добыямо

$$\int x^3\,dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{5}x^2\,(2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}\int x\,dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Како є пакъ $x\,dx$, безъ обзира на сталногъ чинителя, диференціалъ одъ x^2, то є по образцу 18. § 87.

$$\int x\,dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Заменюючи дакле све по реду добыямо

$$\int x^5 dx(2-x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{7}x^4(2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{35}x^2(2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{32}{105}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -(15x^4 - 24x^2 - 32).(2-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

2.) $\int \frac{dx}{x^4.\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}.dx\,(2+x^2)^{-\frac{1}{2}} = ?$

Образацъ II., узимаюћи у нћму $m=-4$, $n=2$, $r=-1$, $s=2$, $a=b=1$, — дає

$$\int x^{-4}.dx\,(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}x^{-3}.(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\int x^{-2}.dx(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Са $m=-2$ пакъ, поредъ исты други вредностій, налазимо

$$\int x^{-2}.\,dx\,(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x^{-1}.(1+x^2)^{\frac{1}{2}},$$

и зато ако надлежно заменемо, вопросный

$$\int x^{-4}\,dx.(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}x^{-3}.(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-1}.(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x}\right)\sqrt{1+x^2}$$

$$= -\frac{1}{3x^3}(1-2x^2)\sqrt{1+x^2} + C.$$

3.) $\int \frac{dx\,(1+x)^{\frac{5}{2}}}{x} = \int x^{-1}\,dx\,(1+x)^{\frac{5}{2}} = ?$

По III. образцу, ако у истомъ ставимо $m=-1$, $n=1$, $a=b=1$, $r=5$, $s=2$, — **слѣдує**

$$\int x^{-1}\,dx\,(1+x)^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + \int x^{-1}\,dx\,(1+x)^{\frac{3}{2}}.$$

По томъ истомъ, са $r=3$ **поредъ пређашньи други вредностій**

$$\int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + \int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{\frac{1}{2}}.$$

И опетъ по нѣму са $r=1$,

$$\int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{\frac{1}{2}} = 2(1+x)^{\frac{1}{2}} + \int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Како є пакъ по § 99.

$$\int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = l\,\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1},$$

то є, ако уредно заменемо, вопросный

$$\int \frac{dx\,(1+x)^{\frac{5}{2}}}{x} = \frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + 2(1+x)^{\frac{1}{2}} + l\,\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$= 2\left[\frac{1}{5}(1+x)^2 + \frac{1}{3}(1+x) + 1\right].\sqrt{1+x} + l\,\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

4.) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(2-x)^3}} = \int x^2\,dx\,(2-x)^{-\frac{3}{2}} = ?$

По образцу IV., узимаюћи $m=2$, $n=1$, $r=-3$, $s=2$, $a=2$, $b=-1$, **имамо**

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(2-x)^3}} = x^3\,(2-x)^{-\frac{1}{2}} - 3\int x^2.\,dx\,(2-x)^{-\frac{1}{2}},$$

а овай в последньій интегралъ по § 99. $= -2\left[\frac{1}{5}(2-x)^2 - \frac{4}{3}(2-x)+4\right]\cdot\sqrt{2-x}$; дакле ако ову нѣгову вредность заменемо, вопросный

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(2-x)^3}} = \frac{x^3}{\sqrt{2-x}} + 10\left[\frac{1}{5}(2-x)^2 - \frac{4}{3}(2-x)+4\right]\cdot \times \sqrt{2-x} + C.$$

§ 111.

Осимъ овы примера употребытѣмо образце § 108. іошъ на разрешенѣ често появлююћи се интеграла

$$\int dx\sqrt{a \pm bx^2},\quad \int \frac{x^m.\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int \frac{x^m.\,dx}{\sqrt{x^2-1}} \text{ и } \int \frac{x^m.\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

за свако цело, положно или одречно m.

1.) Ако у образцу III. поменутога §-а узмемо $m = 0$, $n = 2$, $\frac{r}{s} = \frac{1}{2}$, добыямо

$$\int dx\,(a+bx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,x\,(a+bx^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}};$$

ако пакъ место последнѣгъ интеграла узмемо нѣгову вредность по 20. образцу § 88., истый

35.) $$\int dx\,(a+bx^2)^{\frac{1}{2}} = \int dx\sqrt{a+bx^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{a+bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\,l\,(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}) + C.$$

На истый начинъ

$$\int dx\,(a-bx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,x\,(a-bx^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}},$$

или ако место последњегъ интеграла метнемо нѣгову вредность по 21. образцу пређе поменутога §-а,

36.) $$\int dx \sqrt{a - bx^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{a - bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} arc\left(sin = x \sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C.$$

2.) Ставляюћи у образцу I. $n = 2$, $r = -1$, $s = 2$, $a = 1$, $b = -1$, слѣдуе уобште

$$\int \frac{x^m . dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1} . \sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2} . dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

ту пакъ узимаюћи место m најпре по реду све безпарне, а после све парне броеве, добыямо подпуный

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \frac{x^3 . dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^2}{3} \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{x^2}{3} + \frac{2.1}{3.1}\right) \cdot \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \frac{x^5 . dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^4}{5} \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{4}{5} \int \frac{x^3 . dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{x^4}{5} + \frac{4.1}{5.3} x^2 + \frac{4.2.1}{5.3.1}\right) \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \frac{x^7 . dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^6}{7} \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{6}{7} \int \frac{x^5 . dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{x^6}{7} + \frac{6.1}{7.5} x^4 + \frac{6.4.1}{7.5.3} x^2 + \frac{6.4.2.1}{7.5.3.1}\right) \sqrt{1-x^2} + C,$$

. . . . . .

$$\int \frac{x^2.dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,arc\,(sin = x) + C,$$

$$\int \frac{x^4.dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^3}{4}\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{4}\int \frac{x^2.dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{x^3}{4} + \frac{3.1}{4.2}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{3.1}{4.2}\,arc\,(sin = x) + C,$$

$$\int \frac{x^6.dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^5}{6}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{5}{6}\int \frac{x^4.dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{x^5}{6} + \frac{5.1}{6.4}x^3 + \frac{5.3.1}{6.4.2}x\right)\sqrt{1-x^2}$$

$$+ \frac{5.3.1}{6.4.2}\,arc\,(sin = x) + C,$$

. . . . . .

3.) Обзирући се нато, да є образацъ II. нарочно за одречногъ изложителя m, узимаюћи т. є. у истомъ образцу одма таково m, стои

$$\int \frac{dx.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{x^m} = -\frac{(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}}{a\,(m-1)\,x^{m-1}}$$

$$+ \frac{b\,[nr - s\,(m-n-1)]}{as\,(m-1)} \int \frac{dx.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{x^{m-n}} \ldots (v.,$$

тако да ако метнемо $n = 2$, $r = -1$, $s = 2$, $a = 1$, $b = -1$, имамо уобште подпуный

$$\int \frac{dx}{x^m.\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}.\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Овай интегралъ, каошто се лако увиђа, излази најпосле на $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$; зато да пре свега другога изнађемо тай.

Образацъ 28. § 89., ако ставимо $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -$, дає

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = l\left(\frac{2\sqrt{1-x^2}-2}{x}\right) = l\frac{(-2).(1-\sqrt{1-x^2})}{x}$$

$$= l\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + l(-2) = l\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$$

(ако т. є. $l(-2)$ приброимо сталномъ брою C)

$$= -l\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}} = -l\frac{x(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= -l\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = -lX,$$

ако т. є. ради краткоће у даљмъ послу ставимо

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = X.$$

Садъ узмимо у горњмъ образцу m најпре по реду = безпарнимъ, а после парнимъ броєвима. Слѣдуе

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}lX + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{4x^4}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{1}{4x^4} + \frac{3.1}{4.3\,x^2}\right)\sqrt{1-x^2} - \frac{3.1}{4.2}lX + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^7 . \sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{6x^6} \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{5}{6} \int \frac{dx}{x^5 . \sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{1}{6x^6} + \frac{5.1}{6.4.x^4} + \frac{5.3.1}{6.4.2.x^2}\right) \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$- \frac{5.3.1}{6.4.2} lX + C,$$

. . . . . .

$$\int \frac{dx}{x^2 . \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{1.x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^4 . \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3.x^3} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^2 . \sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{1}{3x^3} + \frac{2}{3.1.x}\right) \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^6 . \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{5.x^5} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{1}{5x^5} + \frac{4}{5.3.x^3} + \frac{4.2}{5.3.1.x}\right) \cdot \sqrt{1-x^2} + C,$$

. . . . . .

4.) **Узимаюћи у свима предходећимъ образцима подъ 2. и 3. место** x, $\frac{1}{x}$, **дакле место** dx, $-\frac{dx}{x^2}$, — **добыямо по реду**

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x} \sqrt{x^2-1} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^4 . \sqrt{x^2-1}} = \left(\frac{1}{3x^3} + \frac{2.1}{3.1.x}\right) \sqrt{x^2-1} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^6 . \sqrt{x^2-1}} = \left(\frac{1}{5x^5} + \frac{4.1}{5.3.x^3} + \frac{4.2.1}{5.3.1.x}\right) \sqrt{x^2-1} + C,$$

. . . . . .

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -arc\left(sin = \frac{1}{x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^3.\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2x^2}\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}arc\left(sin = \frac{1}{x}\right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^5.\sqrt{x^2-1}} = \left(\frac{1}{4x^4} + \frac{3.1}{4.2.x^2}\right)\sqrt{x^2-1} - \frac{3.1}{4.2}arc\left(sin = \frac{1}{x}\right) + C,$$

. . . . . .

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = l\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C,$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\,l\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C,$$

. . . . . .

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} + C,$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2.1}{3.1}\right)\sqrt{x^2-1} + C,$$

. . . . . .

5.) Најпосле, због $\frac{x^m.dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = x^m.dx(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{m-\frac{1}{2}} \times$

$\times\, dx(2a-x)^{-\frac{1}{2}}$, слѣдує изъ образца I., ставляюћи у истомъ $2a$ место a, $b = -1$, $m - \frac{1}{2}$ место m, $n = 1$, $r = -1$, $s = 2$, —

$$\int \frac{x^m.dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{1}{m}x^{m-\frac{1}{2}}.\sqrt{2a-x} + \frac{a(2m-1)}{m}\int \frac{x^{m-1}.dx}{\sqrt{2ax-x^2}} \ldots \text{(a.}$$

Подобно изъ образца *v*.)

$$\int \frac{dx}{x^m.\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a(2m-1)x^m} + \frac{m-1}{a(2m-1)}\int \frac{dx}{x^{m-1}.\sqrt{2ax-x^2}} \ldots\ldots \text{(b.,}$$

два образца, съ коима доводимо вопросне интеграле постепено на друге истога рода, съ маньимъ изложителѣмъ m, докъ првый найпосле на

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = arc\left(sin.\, v = \frac{x}{a}\right) \quad \text{(обр. 14. § 86.)}$$

$$= C - arc\left(sin = \frac{a-x}{a}\right)^{*}), \text{ или}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2} + a\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$= -\sqrt{2ax-x^2} - arc\left(sin = \frac{a-x}{a}\right)^{**}), \text{ а другий на } \int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = arc\left(sin\, v = \frac{x}{a}\right), \text{ или}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{1}{ax}\sqrt{2ax-x^2}$$

(§ 90. обр. 31.).

з.) Неколико образаца за интеграле функција са $(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}}$.

§ 112.

Место прекогъ интеграленя функција, коє садрже $(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}}$, пробитачніє є умлогимъ случаєвима изнаћи вопросный интегралъ помоћу таковы образаца, съ

---

*) $arc\left(sin.\, v = \frac{x}{a}\right) = arc\left(cos = 1-\frac{x}{a}\right) = 90^0 - arc\left(sin = 1-\frac{x}{a}\right)$

$= C - arc\left(sin = \frac{a-x}{a}\right)$

**) ставляюћи у $a.$) $m = 1$.

коима га постепено доводимо на друге, већъ познате интеграле. Зато ћемо у слѣдующимъ §§-ма неколико тога свойства образаца поставити, и одма на друге, iошъ потребне интеграле употребити.

§ 113.

Образци III. и IV. § 108., ставляюћи $m = 0$, $n = 2$, и $c + x$ место x, даю

$$\int dx \,.\, [(a + bc^2) + 2bcx + bx^2]^{\frac{r}{s}}$$

$$= \frac{s}{s+2r} \cdot (c+x) \cdot \, [(a + bc^2) + 2bcx + bx^2]^{\frac{r}{s}}$$

$$+ \frac{2ar}{s+2r} \int dx \, [(a + bc^2) + 2bcx + bx^2]^{\frac{r}{s}-1}$$

и $$\int dx \,.\, [(a + bc^2) + 2bcx + bx^2]^{\frac{r}{s}}$$

$$= -\frac{s}{2a(r+s)} \cdot (c+x) \,.\, [(a + bc^2) + 2bcx + bx^2]^{\frac{r}{s}+1}$$

$$+ \frac{2r+3s}{2a(r+s)} \int dx \, [(a + bc^2) + 2bcx + bx^2]^{\frac{r}{s}+1} \,;$$

одавде пакъ, ставляюћи $a + bc^2 = \alpha$, $2bc = \beta$ и $b = \gamma$, т. є. $a = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\gamma}$, $b = \gamma$ и $c = \frac{\beta}{2\gamma}$, — слѣдує

$$\int dx \, (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}} = \frac{(\beta + 2\gamma x)\, s}{2\gamma \, (s + 2r)} \, (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}}$$

$$+ \frac{(4\alpha\gamma - \beta^2) r}{2\gamma \, (2r + s)} \cdot \int dx \, (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}-1} \quad . \quad . \quad (A.$$

и $$\int dx \, (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}} = -\frac{(\beta + 2\gamma x)\, s}{(4\alpha\gamma - \beta^2)(r+s)} \, (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}+1}$$

$$+ \frac{2\gamma \, (2r + 3s)}{(4\alpha\gamma - \beta^2)(r+s)} \cdot \int dx \, (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}+1} \,,$$

или место овогъ последнѣгъ образца, узевши у призренѣ да истый, каогодъ и онай IV., одъ кога є добывенъ, стои нарочно за одречногъ изложителя $\frac{r}{s}$; другій

$$\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}}} = \frac{(\beta+2\gamma x)\,s}{(4\alpha\gamma-\beta^2)(r-s)(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}-1}}$$

$$+\frac{2(2r-3s)}{(4\alpha\gamma-\beta^2)(r-s)}\cdot\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}-1}}\ldots(B.$$

§ 114.

1.) Изъ горнѣгъ образца A.), ако узмемо $\frac{r}{s}=\frac{1}{2}$, слѣдує

$$\int dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\beta+2\gamma x}{4\gamma}(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{8\gamma}\int dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

т. є.

$$\int dx\sqrt{\alpha+\beta x\pm\gamma x^2} = \frac{\beta\pm 2\gamma x}{\pm 4\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x\pm\gamma x^2}$$

$$+\frac{\pm 4\alpha\gamma-\beta^2}{\pm 8\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x\pm\gamma x^2}},$$

и дакле, ако место последнѣгъ интеграла узмемо нѣгове вредности по образцима 24. и 25. § 89.,

37.) $$\int dx\cdot\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = \frac{\beta+2\gamma x}{4\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

$$+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{8\gamma\sqrt{\gamma}}\,l\left[2\gamma x+\beta+2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}\right]$$

38.) $\int dx \sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2} = \frac{2\gamma x-\beta}{4\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$

$$+\frac{4\alpha\gamma+\beta^2}{8\gamma\sqrt{\gamma}} . arc\left(sin = \frac{2\gamma x-\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}}\right)$$

2.) Съ $\alpha = 0$, $\beta = 2a$ и $\gamma = 1$, добыямо изъ предходећа два образца

39.) $\int dx \sqrt{2ax+x^2} = \frac{1}{2}(a+x)\sqrt{2ax+x^2} - \frac{a^2}{2} l(x+a$

$$+\sqrt{2ax+x^2}) + C$$

40.) $\int dx \sqrt{2ax-x^2} = \frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}$

$$+\frac{a^2}{2} arc\left(sin = \frac{x-a}{a}\right) + C.$$

3.) Ако у триному $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ узмемо $x = y - \frac{\beta}{2\gamma}$ $= \frac{2\gamma y-\beta}{2\gamma}$, прелази по теоріи выши єдначина (I. Ч.) истый триномъ у биномъ вида $a+by^2$, при чему є $a = \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\gamma}$, а $b = \gamma$.

Пошто є пакъ при той замени іошъ $dx = dy$, то слѣдує

41.) $\int x^m . dx (\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}} = \int \left(y-\frac{\beta}{2\gamma}\right)^m . dy (a+by^2)^{\frac{r}{s}}$

$$= (-1)^m . \int \left(\frac{\beta}{2\gamma}-y\right)^m . dy (a+by^2)^{\frac{r}{s}}.$$

При овоме имамо приметити: ако є m цео положанъ брой, онда се десный интегралъ састои изъ $m+1$ интеграла, вида $\int Ay^p . dy (a+by^2)^{\frac{r}{s}}$, коє можемо определити

по пређашньимъ §§-ма. Шта више, и іошъ обштіи $\int x^q . dx\,(a+\beta x^k+\gamma x^{2k})^{\frac{r}{s}}$ може се условно на тай истый начинъ изнаћи, єръ чимъ метнемо $x^k = z$, прелази у $\frac{1}{k}\int z^{\frac{m+1}{k}} . dz\,(\alpha+\beta z+\gamma z^2)^{\frac{r}{s}}$, т. є. у пређашньій, тако да нѣгово решенѣ после, ако є само $\frac{m+1}{k}$ цео положанъ брой, неподлежи никаквой даљой теготи.

4.) Изъ пређашнѣгъ 41. интеграла, чимъ метнемо $m=1$, а $\frac{r}{s}=\frac{1}{2}$, постає

$$\int x dx \sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = -\int\left(\frac{\beta}{2\gamma}-y\right).dy.(a+by^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{\beta}{2\gamma}\int dy.(a+by^2)^{\frac{1}{2}}+\int y dy.(a+by^2)^{\frac{1}{2}},$$

узимаюћи пакъ место ова два интеграла десно њиове односне вредности по обр. 35. § 111. и обр. 18. § 87., слѣдує

$$\int x dx.\sqrt{a+\beta x+\gamma x^2} = -\frac{\beta}{4\gamma}\left[y\sqrt{a+by^2}+\frac{a}{\sqrt{b}}\,l\,(y\sqrt{b}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{a+by^2})\right]+\frac{1}{3}(ab+y^2).\frac{\sqrt{a+by^2}}{b}.$$

Найпосле повративши место y и $a+by^2$ њиове односне вредности $y=x+\frac{\beta}{2\gamma}=\frac{2\gamma x+\beta}{2\gamma}$ и $\alpha+\beta x+\gamma x^2$, остає

$$42.)\quad \int x dx\,.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = -\frac{\beta}{8\gamma^2}\cdot[(\beta+2\gamma x)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

$$+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{2\sqrt{\gamma}}\,l\,(\beta+2\gamma x+2\sqrt{\gamma}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2})$$

$$+\frac{3}{\gamma}(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

§ 115.

Тражећи диференціалъ израза $x^{n-1}.\sqrt{a+\beta x+\gamma x^2}$,

добыямо га $=(n-1)\,x^{n-2}.dx\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\dfrac{x^{n-1}.(\beta+2\gamma x)\,dx}{2\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$

$$=\frac{(n-1)\,\alpha x^{n-2}.dx+(n-\frac{1}{2})\,\beta x^{n-1}.dx+n\gamma x^n.dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}.$$

Одтудъ слѣдуе

$$\frac{x^n.dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=d.x^{n-1}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-\frac{(n-\frac{1}{2})\,\beta}{n\gamma}.\frac{x^{n-1}.dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

$$-\frac{(n-1)\,\alpha}{n\gamma}.\frac{x^{n-2}.dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

и дакле

$$\int\frac{x^n.dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{1}{n\gamma}.x^{n-1}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-\frac{(n-\frac{1}{2})\,\beta}{n\gamma}\times$$

$$\times\int\frac{x^{n-1}.dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}-\frac{(n-1)\,\alpha}{n\gamma}\int\frac{x^{n-2}.dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}\ldots(C.,$$

образацъ за умаляванѣ положногъ изложителя n, **дакле за доводенѣ вопросногъ интеграла на друге простіе истога рода.**

Ставляюћи пакъ у овомъ образцу $n+2$ **место** n, **и изражаваюћи после последньій интегралъ десно, добыямо, ако одма сматрамо** n **као одречно, подобанъ образацъ за увећаванѣ одречногъ изложителя**

$$\int\frac{dx}{x^n.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=-\frac{1}{(n-1)\,\alpha}.\frac{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x^{n-1}}$$

$$-\frac{(n-\frac{3}{2})\,\beta}{(n-1)\,\alpha}\int\frac{dx}{x^{n-1}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

$$-\frac{(n-2)\,\gamma}{(n-1)\,\alpha}\int\frac{dx}{x^{n-2}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}\ldots(D.$$

Ако є n цео положанъ брой, онда се вопросный интегралъ образца *C.*) доводи на $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$, а интегралъ предстоећегъ образца *D.*) на $\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$, кои су већъ познати.

Пошто є пакъ найпосле $x^n . dx \sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$

$$= \frac{x^n dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{\alpha x^n dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} + \frac{\beta x^{n+1}.dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

$$+ \frac{\gamma x^{n+2}.dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}, \quad \text{а} \quad \frac{dx\,.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x^n}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2).dx}{x^n\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{\alpha dx}{x^n.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} + \frac{\beta dx}{x^{n-1}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

$$+ \frac{\gamma dx}{x^{n-2}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

то є лако увидити, како съ истимъ образцима можемо безъ далѣ теготе изнаћи и интеграле ова два израза, ако є n цео положанъ брой.

и.) Интеграленѣ неки трансцендентны функція.

1.) $\int \psi(x) . l^n x . dx.$

§ 116.

1.) Ако є при датой диференціалной функціи $\psi(x).l^n x.dx$ функція $\psi(x)$ алгебрайска и такова, да $\int \psi(x)\,dx$ можемо определити на ма кои одъ дояко познаты начина,

онда изтражуємо $\int \psi(x) . l^m x . dx$ почастно, т. є. помоћу III. основногъ правила § 85., на тай начинъ, да у томе метнемо $\varphi(x) = l^m x$, а $df(x) = \psi(x)\, dx$, чимъ быва

$$\int \psi(x) . l^m x . dx = l^m x . \int \psi(x)\, dx - n \int \left[l^{m-1} x . dx . \frac{\int \psi(x)\, dx}{x} \right],$$

или ако ради краткоће заменемо $\int \psi(x)\, dx$ съ $\phi(x)$,

$$\int \psi(x) . l^m x . dx = l^m x . \phi(x) - n \int l^{m-1} x dx . \frac{\phi(x)}{x}$$

$$= l^m x . \phi(x) - n \int l^{m-1} . F(x)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha.,$$

при чему $F(x)$ стои место $\frac{\phi(x)}{x}$.

Съ овимъ образцемъ доводи се вопросный интегралъ постепено на простіе истога рода, докъ найпосле, ако є n цео положанъ брой, на $\int V(x)\, dx$, у коме $V(x)$ представля неку алгебрайску функцію одъ x.

2.) Ако изъ тога образца определимо десиый интегралъ, и после место n узмемо $n+1$, притомъ пакъ n одма одречно, слѣдує другій подобный образацъ

$$\int \frac{F(x)\, dx}{l^m x} = - \frac{\phi(x)}{(n-1) l^{n-1} x} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\psi(x)\, dx}{l^{n-1} x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta.,$$

при комъ є, по горньимъ заменама, $\phi(x) = x F(x)$, а

$$\psi(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} = \phi_1(x).$$

§ 117.

Примери. 1.) Тражи се $\int x^m . dx . l^m x$.

Ставлямо у горньмъ образцу $\alpha.$) $\psi(x) = x^m$, $\phi(x)$ $= \int \psi(x)\, dx = \int x^m . dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, дакле $\frac{\phi(x)}{x} = F(x) = \frac{x^m}{m+1}$;

па добыямо

$$\int x^m . dx . l^n x = \frac{x^{m+1} . l^n x}{m+1} - \frac{n}{m+1} \cdot \int x^m dx . l^{n-1} x ,$$

или ако овде место n узмемо редомъ $n-1$, $n-2$, $n-3$, и т. д., и притомъ свагда новый интегралъ у предходећему заменемо,

$$\int x^m dx\, l^n x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left[l^n x - \frac{n}{m+1} l^{n-1} x + \frac{n^{2\underline{|}-1}}{(m+1)^2} \cdot l^{n-2} x \right.$$

$$\left. - \frac{n^{3\underline{|}-1}}{(m+1)^3} . l^{n-3} x + \ldots . \right] + C. \quad \ldots . \ (\gamma.$$

Овай редъ быће **краянъ**, само ако є n **цео положанъ** брой, иначе тече, по увићавномъ закоиу, у безкрайность.

2.) За $\int \frac{x^m . dx}{l^n x}$ ставлямо у образцу $\beta.$) $F(x) = x^m$, $\phi(x) = x . F(x) = x . x^m = x^{m+1}$, $\psi(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} = \phi_1(x) = (m+1) x^m$, тако да є по томе после вопросный

$$\int \frac{x^m dx}{l^n x} = - \frac{x^{m+1}}{(n-1) l^{n-1} x} + \frac{m+1}{n-1} \cdot \int \frac{x^m dx}{l^{n-1} x} .$$

Ако пакъ овде, као мало пре, место n узмемо редомъ $n-1$, $n-2$, $n-3$, . . ., и притомъ опетъ свагда последньій интегралъ заменемо у предходећемъ, добыямо найпосле

$$\int \frac{x^m . dx}{l^n x} = - \frac{x^{m+1}}{n-1} \cdot \left[\frac{1}{l^{n-1} x} + \frac{m+1}{(n-2) l^{n-2} x} + \frac{(m+1)^2}{(n-2)^{2\underline{|}-1} . l^{n-3} x} \right.$$

$$\left. + \frac{(m+1)^3}{(n-2)^{3\underline{|}-1} . l^{n-4} x} + \ldots . \right]$$

$$+ \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int \frac{x^m . dx}{lx} + C \ldots \ (\delta.$$

тако да овай интегралъ само іошъ зависи одъ $\int \frac{x^m . dx}{lx}$.

Овай последньій може се представити у простіємъ виду тиме, да узмемо $x^{m+1} = z$, дакле $x^m = \frac{dz}{m+1}$, а $lx = \frac{lz}{m+1}$, после чега стои $\int \frac{x^m . dx}{lx} = \int \frac{dz}{lz}$, или ако іошъ метнемо $lz = y$, т. е. $e^y = z$:

$$\int \frac{x^m . dx}{lx} = \int \frac{e^y . dy}{y} = \int e^y . \frac{dy}{y} .$$

О овомъ интегралу говорит'ћемо доцніе; овде само толико споминћемо, да е обично познатъ подъ именомъ **интегралный логаритамъ.**

2.) $\int F(x)\, a^x . dx .$

§ 118.

Ако у III. основномъ правилу, § 85., узмемо $df(x) = a^x . dx$, $\varphi(x) = F(x)$, дакле $f(x) = \int a^x dx = \frac{a^x}{la}$, $d\varphi(x) = dF(x) = F_1(x)\, dx$, быва по истомъ правилу

$$\int F(x)\, a^x\, dx = \frac{a^x . F(x)}{la} - \frac{1}{la} \int F_1(x)\, a^x\, dx \cdots\cdots \text{(s.}$$

На истый начинъ слћдуе далћ

$$\int F_1(x)\, a^x\, dx = \frac{a^x . F_1(x)}{la} - \frac{1}{la} \int F_2(x)\, a^x . dx ,$$

$$\int F_2(x)\, a^x\, dx = \frac{a^x . F_2(x)}{la} - \frac{1}{la} \int F_3(x)\, a^x\, dx ,$$

. . . . . .

Дакле ако надлежно, съ трага напредъ, заменемо,

$$\int F(x)\, a^x\, dx = \frac{a^x}{la} \left[F(x) - \frac{F_1(x)}{la} + \frac{F_2(x)}{l^2 a} - \frac{F_3(x)}{l^3 a} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} . F_{n-1}(x)}{l^{n-1} a} \right] + \frac{(-1)^n}{l^n a} \int F_n(x) a^x dx \ldots . \text{(ε.,}$$

при чему $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... представляю изводне функције одъ $F(x)$, и вопросный интегралъ зависи найпосле одъ $\int F_n(x)\, a^x\, dx$, на тай начинъ, да ће быти **краянъ**, ако се єдна одъ тій изводны функція појави као по x сталанъ брой.

§ 119.

Примери.

1.) Тражи се $\int x^n . a^x . dx$.

Ту є $F(x) = x^n$, дакле $F_1(x) = nx^{n-1}$, $F_2(x) = n^{2|-1} . x^{n-2}$, $F_3(x) = n^{3|-1} . x^{n-3}$ . . . . . , и зато по нађеномъ образцу, ако є n цео положанъ брой,

$$\int x^n a^x dx = \frac{a^x}{la}\left[x^n - \frac{nx^{n-1}}{la} + \frac{n^{2|-1} . x^{n-2}}{l^2 a} - \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^n . n\,!}{l^n a}\right] + C \ldots\ldots\ldots (\zeta.$$

2.) Пыта се чему є раванъ $\int \frac{a^x dx}{x^n}$?

Извртаюћи образацъ *s.*) у прећашњемъ §-у, добыямо

$$\int F_1(x)\, a^x\, dx = a^x . F(x) - la \int F(x)\, a^x\, dx .$$

Стављаюћи ту $F(x) = x^n$, дакле $F_1(x) = nx^{n-1}$, стои

$$\int x^{n-1} . a^x\, dx = \frac{a^x . x^n}{n} - \frac{la}{n} \int x^n . a^x . dx ,$$

а ако іошъ узмемо $-n+1$ место n,

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)\, x^{n-1}} + \frac{la}{n-1} \int \frac{a^x dx}{x^{n-1}} \ldots\ldots\ldots (t.$$

Овде пакъ за n редомъ $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... узимаюћи, и притомъ свагда последньій интегралъ у предходећемъ заменююћи, слѣдує

$$\int\frac{a^x\,dx}{x^n}=-\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}\cdot\left[1+\frac{la}{n-2}x+\frac{l^2a}{(n-2)^{2|-1}}\cdot x^2+\right.$$

$$\left.+\frac{l^3a}{(n-2)^{3|-1}}\cdot x^3+\cdot\cdot\frac{l^{n-2}a}{(n-2)!}x^{n-2}\right]+\frac{l^{n-1}a}{(n-1)!}\int\frac{a^x\,dx}{x}+C\cdots(\eta.$$

Далѣ се овай интегралъ неможе свести по томе, што горньій образацъ $t.$) за $n=1$ недає никакву вредность. Остає дакле іошъ зависимъ одъ интегралногъ логаритма $\int\frac{a^x\,dx}{x}$, кои ћемо текъ доцніе изтражити.

3.) Ако є у оба изнађена интеграла брой n разломакъ, онда су ньиови редови безкрайни.

Тако н. п. ако у последњемъ образцу $\eta.$) ставимо $n=\frac{1}{2}$, слѣдує

$$\int\frac{a^x\,dx}{\sqrt{x}}=2a^x.\sqrt{x}\left(1-\frac{2}{1.3}xla+\frac{4}{1.3.5}\cdot x^2l^2a-\frac{8}{1.3.5.7.}x^3la^3\right.$$

$$\left.+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right)+C;$$

ако пакъ у ономе подъ $\zeta.$) метнемо $n=-\frac{1}{2}$, добыямо

$$\int\frac{a^x.dx}{\sqrt{x}}=\frac{a^x}{la\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{xla}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1.3}{x^2l^2a}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1.3.5}{x^3la^3}+\cdot\cdot\right)+C.$$

з.) Интеграленѣ диференціалны кружны (гоніометрійски) функція.

§ 120.

а.) Ако у образцима 5—8. §-а 86. узмемо nx место x, дакле ndx место dx, слѣдую нови ови:

1.) $\int sin\,nx.\,dx=-\frac{1}{n}cos\,nx$ | 2.) $\int cos\,nx.\,dx=\frac{1}{n}sin\,nx$

3.) $\int \frac{dx}{\cos^2 nx} = \frac{1}{n} tang\, nx$ | 4.) $\int \frac{dx}{\sin^2 nx} = -\frac{1}{n} cot\, nx$

коима свакомъ треба іошъ додати произвольный стални брой C.

б.) Пошто є $\sin x . \cos x . dx = \sin x . d \sin x$

$$= -\cos x . d \cos x$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x . d 2x = -\frac{1}{4} d \cos 2x ,$$

$$tang\, x . dx = \frac{\sin x . dx}{\cos x} = -\frac{d \cos x}{\cos x},$$

$$cot\, x . dx = \frac{\cos x . dx}{\sin x} = \frac{d \sin x}{\sin x},$$

$$\frac{dx}{\sin x . \cos x} = \frac{dx}{\cos x} : \sin x = \frac{dx}{\cos^2 x} : \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{d\, tang\, x}{tang\, x},$$

и зато $cosec\, x . dx = \frac{dx}{\sin x} = \frac{d \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x . \cos \frac{1}{2} x} = \frac{d\, tang \frac{1}{2} x}{tang \frac{1}{2} x}$,

и зато $sec\, x . dx = \frac{dx}{\cos x} = -\frac{d(90^0 - x)}{\sin(90^0 - x)} = -\frac{d\, tg \frac{1}{2}(90^0 - x)}{tang \frac{1}{2}(90^0 - x)}$

$$= -\frac{dtg(45^0 - \frac{1}{2}x)}{tang(45^0 - \frac{1}{2}x)};$$

то мора быти обратно

5.) $\int \sin x \cos x\, dx = \int \sin x . d \sin x = \frac{1}{2} \sin^2 x$

$$= -\int \cos x . d \cos x = -\frac{1}{2} sos^2 x$$

$$= -\frac{1}{4} \int d \cos 2x = -\frac{1}{4} \cos 2x ,$$

6.) $\int tang\, x \,.\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -l\cos x$

$$= l\frac{1}{\cos x} = l\sec x,$$

7.) $\int cot\ x \,.\, dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = l\sin x$

$$= -l\frac{1}{\sin x} = -l\,cosec\, x,$$

8.) $\int \frac{dx}{\sin x.\cos x} = \int \frac{d\, tang\, x}{tg\, x} = l\, tang\, x$

$$= -l\frac{1}{tg\, x} = -l\cot x,$$

9.) $\int cosec\, x.dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\, tg\, \frac{1}{2}x}{tg\, \frac{1}{2}x} = l\, tang\, \frac{1}{2}x$

$$= -l\cot \tfrac{1}{2}x,$$

10.) $\int sec\ x \,.\, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{d\, tg\,(45^0 - \frac{1}{2}x)}{tg\,(45^0 - \frac{1}{2}x)}$

$$= -l\, tg(45^0 - \tfrac{1}{2}x)$$

$$= l\cot(45^0 - \tfrac{1}{2}x)$$

$$= l\, tg\,[90^0 - (45^0 - \tfrac{1}{2}x)] = l\, tg(45^0 + \tfrac{1}{2}x),$$

и свима овима образцима валя іошъ придати прорзвольный стагный брой C.

§ 121.

По тригон. § 23. имамо

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha.\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$2\sin\alpha.\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta).$$

Мора быти дакле, ако узмемо $\alpha = mx$, $\beta = nx$, са dx помложимо, а съ 2 разделимо, па онда помоћу предходећегъ §-а интегралимо:

11.) $$\int \sin mx . \cos nx . dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

12.) $$\int \cos mx . \cos nx . dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

13.) $$\int \sin mx . \sin nx . dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C.$$

§ 122.

Ако є n цео положанъ брой, онда по I. Ч. § 191. имамо за **парно** n

$$\sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n} \cdot \left[\cos nx - \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x - \ldots\right]$$

а за **безпарно** n

$$\sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n} \cdot \left[\sin nx - \binom{n}{1}\sin(n-2)x + \binom{n}{2}\sin(n-4)x - \ldots\right]$$

По исте Ч. § 190. пакъ стои за ма какво цело положно n

$$\cos^n x = \cos nx + \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x + \ldots.$$

Ако дакле сва три ова образца съ dx помложимо и после интегралимо, слѣдуе за **парно** n

14.) $$\int \sin^n x . dx = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n} \cdot \left[\int \cos nx . dx - \binom{n}{1}\int \cos(n-2)x . dx + \binom{n}{2}\int \cos(n-4)x . dx - \ldots\right],$$

за **безпарно** n

15.) $$\int sin^n x \,.\, dx = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n} \cdot [\int sin\, nx.dx - \binom{n}{1} \int sin(n-2)x.dx + \binom{n}{2} \int sin\,(n-4)x\,.\,dx - \ldots],$$

за обое n

16.) $$\int cos^n x\,.\,dx = \int cos\, nx\,.\,dx + \binom{n}{1} \int cos\,(n-2)\,x\,.\,dx + \binom{n}{2} \int cos\,(n-4)\,x\,.\,dx + \ldots,$$

съ коимъ образцима сведени су вопросни интеграли на оне § 120.

Тако н. п. имамо по првомъ

$$\int sin^4 x\,.\,dx = \frac{(-1)^2}{2^4} \cdot [2 \int cos\, 4x\,.\,dx - 8 \int cos\, 2x\,.\,dx + 6 \int dx]$$

$$= \frac{1}{2^4}\left[\frac{1}{2} sin\, 4x - 4 sin\, 2x + 6x\right] + C, \text{ (§ 120. обр. 2.),}$$

по другомъ

$$\int sin^3 x\,.\,dx = \frac{-1}{2^3} \cdot \int sin 3x.dx - 3\int sin x.dx + 3\int sin\,(-x)\,dx - \int sin(-3x)dx] \text{ (§ 120. обр. 1.)}$$

$$= -\frac{1}{2^3} \cdot \left[-\frac{2}{3} cos\, 3x + 6\, cos\, x\right]$$

$$= \frac{1}{2^3}\left[\frac{2}{3} cos\, 3x - 6\, cos\, x\right] + C;$$

по трећемъ

$$\int cos^3 x.dx = \int cos 3x.dx + 3\int cos x.dx + 3\int cos x.dx + \int cos 3x.dx$$

$$= \frac{2}{3} sin\, 3x + 6\, sin\, x + C.$$

§ 123.

Ставимо $sin\,x = z$. Быт'ће $cos\,x = \sqrt{1-z^2}$, $cos\,x.dx = dz$, дакле $dx = \frac{dz}{cos\,x} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, и по свему

$$\int sin^m x\,.\,cos^n x\,.\,dx = \int z^m.\,(1-z^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int z^m.\,dz\,(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

чимъ є вопросный тай трансцендентный интегралъ сведенъ на онай алгебрайскій, кои смо сматрали у §§-ма **103 — 111.**

Ставляюћи дакле у образцима **I — IV.** § **108.** $x = z$, $a = 1$, $b = -1$, $n = 2$, $\frac{r}{s} = \frac{n-1}{2}$; слѣдує по реду

$$\int sin^m x.cos^n x.dx = -\frac{z^{m-1}.(1-z^2)^{\frac{n+1}{2}}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int z^{m-2}.dz\,(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= \frac{z^{m+1}.(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int z^m.\,dz(1-z^2)^{\frac{n-3}{2}}$$

$$= \frac{z^{m+1}.(1-z^2)^{\frac{n+1}{2}}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int z^{m+2}.\,dz(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= -\frac{z^{m+1}.(1-z^2)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int z^m.\,dz(1-z^2)^{\frac{n+1}{2}},$$

а ако повратимо за z, $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ и $dz\,.\,(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ньиове горнѣ вредности $sin\,x$, $cos\,x$ и dx, —

I.) $$\int sin^m x.\,cos^n x.\,dx = -\frac{sin^{m-1}x.\,cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+1}\int sin^{m-2}x\,.\,cos^n x\,.\,dx$$

образацъ за постепено умаляванѣ положногъ изложителя m;

II.) $$\int sin^m x . cos^n x . dx = \frac{sin^{m+1} x . cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int sin^m x . cos^{n-2} x . dx,$$

за постепено умаляванѣ положногъ изложителя n;

III.) $$\int \frac{cos^n x . dx}{sin^m x} = -\frac{cos^{n+1} x}{(m-1) sin^{m-1} x} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{cos^n x . dx}{sin^{m-2} x},$$

за постепено умаляванѣ одречногъ изложителя m; и

IV.) $$\int \frac{sin^m x . dx}{cos^n x} = \frac{sin^{m+1} x}{(n-1) cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{sin^n x . dx}{cos^{n-2} x},$$

за постепено умаляванѣ одречногъ изложителя n.

§ 124.

Ако узмемо у III. n, а у IV. m одречно, добыямо далѣ

V.) $$\int \frac{dx}{sin^m x . cos^n x} = -\frac{1}{(m-1) sin^{m-1} x . cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{sin^{m-2} x . cos^n x},$$

за умаляванѣ изложителя m, и

VI.) $$\int \frac{dx}{sin^m x . cos^n x} = \frac{1}{(n-1) sin^{m-1} x . cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{sin^m x . cos^{n-2} x},$$

за умаляванѣ изложителя n.

Ако пакъ у I. и III. ставимо $n = 0$, а у II. и IV. $m = 0$, добыямо

VII.) $$\int sin^m x \,.\, dx = -\frac{sin^{m-1}x \,.\, cosx}{m} + \frac{m-1}{m}\int sin^{m-2}x \,.\, dx$$

VIII.) $$\int \frac{dx}{sin^m x} = -\frac{cos\, x}{(m-1)sin^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{sin^{m-2}\, x}$$

IX.) $$\int cos^n x \,.\, dx = \frac{sin\, x \,.\, cos^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}x \,.\, dx$$

X.) $$\int \frac{dx}{cos^n x} = \frac{sin\, x}{(n-1)cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{cos^{n-2}\, x}$$

§ 125.

Ако су m и n цели броєви, долазимо найпосле, повторенимъ по потреби употребляванѣмъ

образца I. при парномъ n на $\int cos^n x \,.\, dx$,

„ II. „ „ n „ $\int sin^n x \,.\, dx$,

„ III. „ „ m „ $\int cos^n x \,.\, dx$,

„ IV. „ „ n „ $\int sin^m x \,.\, dx$,

„ V. „ „ m „ $\int \frac{dx}{cos^n x}$,

„ VI. „ „ n „ $\int \frac{dx}{sin^m x}$; и опетъ

образца I. при безпарномъ n на $\int sinx \,.\, cos^n x \,.\, dx$,

„ II. „ „ n „ $\int cosx \,.\, sin^m x \,.\, dx$,

„ III. „ „ m „ $\int \frac{cos^n x \,.\, dx}{sin\, x}$,

„ IV. „ „ n „ $\int \frac{sin^m x \,.\, dx}{cos\, x}$,

„ V. „ „ m „ $\int \frac{dx}{sinx \,.\, cos^n x}$,

„ IV. „ „ n „ $\int \frac{dx}{sin^m x \,.\, cos\, x}$.

Одъ овы є крайньи интеграла

$$\int cos^n x.\, sinx.\, dx = -\int cos^n x\,.\, d\,cos\, x = -\frac{cos^{n+1}x}{n+1} + C,$$

$$\int sin^m x.\, cosx.\, dx = \int sin^m x\,.\, d\,sin\, x = \frac{sin^{m+1}x}{m+1} + C;$$

$\int sin^m x\,.\,dx$ и $\int cos^n x\,.\,dx$ подлеже даљмъ употребљню образаца VII. и IX., и долази се првимъ, по парномъ или безпарномъ m, на $\int dx = x + C$ или $\int sin\, x\,.\,dx = -cos\, x + C$, другимъ пакъ, по парномъ или безпарномъ n, на $\int dx = x + C$ или $\int cosx\,.\,dx = sin\, x + C$; $\int \frac{dx}{sin^m x}$ и $\int \frac{dx}{cos^n x}$ подлеже даљмъ употребљню образаца VIII. и X., и свршаваю се, првый, по парномъ или безпарномъ m, съ $\int dx = x + C$ или $\int \frac{dx}{sin\, x} = l\, tg\, \frac{x}{2} + C$ (обр. 9. 120.), а другій, по парномъ или безпарномъ n, са $\int dx = x + C$ или $\int \frac{dx}{cos\, x} = l\, tang\,(45^0 + \frac{x}{2}) + C$ (обр. 10. § 120.)

Образацъ I. дає съ $n = -1$,

$$\int \frac{sin^m x\,.\,dx}{cos\, x} = -\frac{sin^{m-1} x}{m-1} + \int \frac{sin^{m-2} x.\, dx}{cos\, x},$$

а образацъ II. съ $m = 1$,

$$\int \frac{cos^n x\,.\,dx}{sin\, x} = \frac{cos^{n-1} x}{n-1} + \int \frac{cos^{n-2} x.\, dx}{sin\, x}.$$

Првый одъ ова два интеграла излази, по парномъ или безпарномъ m, на $\int \frac{dx}{cos\, x}$ или $\int \frac{sin\, x.\, dx}{cos\, x} = \int tang\, x\,.\,dx$, а другій, по парномъ или безпарномъ n, на $\int \frac{dx}{sin\, x}$ или $\int \frac{cos\, x\,.\,dx}{sin\, x} = \int cot\, x\,.\,dx$, — све сами већъ познати интеграли.

На истый начинъ добыямо вайпосле изъ образца V. и VI.,

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \,.\, \cos x} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \,.\, \cos x} \quad \text{и}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos^n x} = \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos^{n-1} x},$$

одъ коя два интеграла опетъ свршава се првый, по парномъ или безпарномъ m, са $\int \frac{dx}{\cos x}$ или $\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x}$, а другій, по парномъ или безпарномъ n, са $\int \frac{dx}{\sin x}$ или $\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos x}$, дакле обадва опетъ са већъ познатимъ интегралима. —

Ако су изложитељи m и n, у образцима о коима говоримсо, разломци, онда се $\int \sin^m x \,.\, \cos^n x \,.\, dx$, неколико само случаєва изузимаюћи, неможе више изнаћи точно, но само іошъ приближно, помоћу безкрайны редова, о комъ начину говорит'ћемо доцніе.

§ 126.

Осимъ предходећега, имамо о вопроснимъ образцима §§ 123. и 124., іошъ слѣдуюће приметити:

1.) Ако бы у комъ одъ ньи, при некимъ вредностима броєва m и n, именитель постао нулла, и они сами дакле неупотребителни, онда є вопросный интегралъ или већъ на другій начинъ изнаћенъ, или се та незгода може обићи другимъ редомъ употребляваня самы тій образаца.

2.) Ако є єданъ само одъ изложителя m и n у $\int \sin^m x \,.\, \cos^n x \,.\, dx$ **безпарный** брой, обадва пакъ положни броєви, онда намъ образци § 123. нетребаю, єръ се у таковомъ случаю вопросный интегралъ може добыти на другій, простіи, изъ слѣдуюћи примера' увиђавный начинъ.

Потребуємо $\int sin^3x \,.\, cos^2x \,.\, dx$. Разлажемо чинителя съ **безпарнимъ** изложителѣмъ, sin^3x, у два чинителя $sin\,x \,.\, sin^2x = sin\,x \,.\, (1 - cos^2x)$. Тимъ постає вопросный

$$\int sin^3x \,.\, cos^2x \,.\, dx = \int sin\,x \,.\, dx \,.\, (1 - cos^2x)\, cos^2x$$

$$= \int cos^2x \,.\, d\,(-cos\,x) \,.\, (1 - cos^2x)$$

$$= \int cos^2x \,.\, d\,cos\,x\, (cos^2x - 1)$$

$$= \int cos^4x \,.\, d\,cos\,x - \int cos^2x \,.\, d\,cos\,x$$

$$= \frac{cos^5x}{5} - \frac{cos^3x}{3} = cos^3x \left(\frac{cos^2x}{5} - \frac{1}{3}\right) + C.$$

Или тражи се $\int sin^6x.cos^5x.dx$. Разлажемо чинителя съ **безпарнимъ** изложителѣмъ, cos^5x, у два чинителя $cos\,x \,.\, cos^4x = cos\,x \,.\, (1 - sin^2x)^2$. Тимъ постає вопросный интегралъ

$$\int sin^6x \,.\, cos^5x \,.\, dx = \int sin^6x \,.\, cos\,x\, dx\, (1 - sin^2x)^2$$

$$= \int sin^6x \,.\, d\,sin\,x\, (1 - sin^2x)^2$$

$$= \int sin^6x \,.\, d\,sin\,x\, (1 - 2\,sin^2x + sin^4x)$$

$$= \int sin^6x \,.\, d\,sin\,x - 2 \int sin^8x \,.\, d\,sin\,x + \int sin^{10}x \,.\, d\,sin\,x$$

$$= \frac{1}{7}\, sin^7x - \frac{2}{9}\, sin^9x + \frac{1}{11}\, sin^{11}x$$

$$= sin^7x \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{9}\, sin^2x + \frac{1}{11}\, sin^4x\right) + C.$$

Или ište се $\int sin^3x \,.\, cos^5x \,.\, dx$, у комъ су **обадва** изложителя броєви безпарни. Ту разлажемо чинителя sin^3x съ **маньимъ** изложителѣмъ у два чинителя $sin\,x \,.\, sin^2x = sin\,x \,.\, (1 - cos^2x)$, и поступамо далѣ као горе.

§ 127.

α.) Ако у **III.** основномъ правилу узмемо редомъ $\varphi(x) = arc\,(sin = x)$, $arc\,(cos = x)$, $arc\,(tang = x)$, $arc\,(cot = x)$, и притомъ свакій путъ $dfx = dx$, добыямо по томъ истомъ реду

17.) $\int arc\,(sin = x)\,.\,dx = x\,.\,arc\,(sin = x) - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= x\,.\,arc\,(sin = x) + \sqrt{1-x^2}$ (§ 111. подъ 2.)

18.) $\int arc\,(cos = x).\,dx = x.\,arc\,cos = x) - \sqrt{1-x^2}$

19.) $\int arc\,(tang = x)\,.\,dx = x\,.\,arc\,(tang = x) - l\sqrt{1+x^2}$

20.) $\int arc\,(cot = x)\,.\,dx = x\,.\,arc\,(cot = x) + l\sqrt{1+x^2}.$

β.) Ако пакъ у истомъ правилу узмемо єданпутъ $\varphi(x) = e^{mx}$, $df(x) = sin\,nx\,.\,dx$, а другипутъ $\varphi\,(x) = sin\,nx$. $df(x) = e^{mx}\,.\,dx$, слѣдує

$\int e^{mx}\,.\,sin\,nx\,.\,dx = -\frac{1}{n}\,e^{mx}\,.\,cos\,nx + \frac{m}{n}\int e^{mx}\,.\,cos\,nx\,.\,dx$ и

$\int e^{mx}\,.\,sin\,nx\,.\,dx = \frac{1}{m}\,e^{mx}\,.\,sin\,nx - \frac{n}{m}\int e^{mx}\,.\,cos\,nx\,.\,dx$,

одтудъ пакъ

21.) $\int e^{mx}\,.\,cos\,nx\,.\,dx = \frac{n\,.\,sin\,nx + m\,cos\,nx}{m^2+n^2}\,.\,e^{mx}.$

На истый начинъ налазимо іошъ одъ $e^{mx}\,.\,cos\,nx\,.\,dx$,

22.) $\int e^{mx}\,.\,sin\,nx\,.\,dx = \frac{m\,.\,sin\,nx - n\,.\,cos\,nx}{m^2+n^2}\,.\,e^{mx}.$

§ 128.

Каогодъ што смо при интеграленю ирраціоналны алгебрайски функція гледали, да ій сходномъ заменомъ преведемо у раціоналне, тако исто морамо се у млогимъ случаєвима при овима гоніометрійскима трудити, да ій таковомъ заменомъ преобразимо у алгебрайске, и тиме

или интеграленѣ олакшамо, или башъ текъ могућнимъ учинимо. Но каогодъ при онима за усавршаванѣ, тако исто при овима за алгебраисанѣ немогу се поставити никаква обшта правила, него могу само упутити примери. Толико єдино може се рећи, да се та цѣль овде понайвише постизава изменомъ єдне или друге, у датой диференціалной функціи находеће се (гоніометрійске) функціє, съ другимъ каквимъ пременльивимъ броємъ. Тиме наилазимо после найобичніє на ирраціоналне, а само редко на раціоналне, у нашой власти лежеће алгебрайске функціє.

Тако н. п. ако изнаћи имамо $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$, ставлямо или $\cos x = z$, или $\sin x = u$, и добыямо тиме при првой замени

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot arc\left(\cos = \frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right),$$

а при другой

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \cdot l\,\frac{b+a\cos x+\sin x\,.\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}.$$

i.) Интеграленѣ помоћу безкрайны редова.

§ 129.

Кадъ свакій покушай, добыти интегралъ дате какове диференціалне функціє у крайной форми изда, остає само іошъ єдна могућность уобште разрешити га, узевши у помоћь безкрайне редове; само што тако добывене интегралне вредности, каошто се по себи лако разуме, немогу быти точне, но само приближне, али свакояко то точніє, штогодъ су добывени за ньи редови сбирльивіи.

За ту цѣль служи пре свега образацъ § 82., са коимъ добыямо $\int \varphi(x)\,dx$ у виду безкрайнога реда. Но лакши є на свакій начинь цео посао, ако дату функцію іошъ пре интеграленя преобразимо у такавъ редъ, зато што тадъ имамо изтраживати саме мономне интеграле.

Пошто є то развіянѣ у редове већъ познато изъ прве части, то можемо съ места предузети разне, далѣ поучаваюће примере.

§ 130.

1.) Ако тражимо $\int \frac{dx}{a+x}$, имамо (простомъ деобомъ броителя 1 чрезъ именителя $a+x$)

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots\ldots\ldots;$$

быт'ће дакле вопросный

$$\int \frac{dx}{a+x} = \int \left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots\ldots\right) dx$$

$$= \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \cdot + C,$$

израженъ, каошто се види, безкрайнимъ редомъ растући степена одъ x.

Ако пакъ пишемо $\frac{1}{x+a}$ место $\frac{1}{a+x}$; и поступамо далѣ као горе, слѣдує іошъ истый

$$\int \frac{dx}{a+x} = \int \frac{dx}{x+a}$$

$$= lx + \frac{a}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{x}\right)^4 + \ldots + C.$$

као редъ падаюћи степена одъ x.

По §-а 87. образцу 18. добыямо точно овай $\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x)$.

Можемо дакле ставити, служећи се првимъ редомъ,

$$l(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \ldots\ldots + C,$$

служећи се пакъ другимъ редомъ,

$$l(x+a) = lx + \frac{a}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3 - \ldots + C.$$

Узимаюћи у првой одъ ове две єдначине $x = 0$, слѣдує $C = la$, тако да после стои

$$l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \ldots,$$

и одтудъ, ако la пренесемо у леву часть, $l(a+x) - la$

$l\frac{a+x}{a}$, т. є.

$$l\left(1+\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \ldots\ldots,$$

познатый редъ изъ I. Ч. § 162.

Ако пакъ при другой єдначини пренесемо lx, добыямо

$$l\left(1+\frac{a}{x}\right) = \frac{a}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3 - \ldots + C,$$

одкуда, ставляюћи $x = \infty$, слѣдує $C = l1 = 0$, и тиме другій іошъ редъ за

$$l(a+x) = lx + \frac{a}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3 - \ldots$$

Првый сабира се то наглиє, штогодъ є x манѣ, другій пакъ то брже, штогодъ є x веће.

2.) **У име** $\int \frac{x^m \cdot dx}{a^n + x^n}$ **имамо**

$$\frac{x^m}{a^n + x^n} = \frac{x^m}{a^n} - \frac{x^{m+n}}{a^{2n}} + \frac{x^{m+2n}}{a^{3n}} - \ldots\ldots,$$

или

$$\frac{x^m}{x^n + a^n} = x^{m-n} - a^n \cdot x^{m-2n} + a^{2n} \cdot x^{m-3n} - \ldots\ldots;$$

дакле є по првомъ реду

$$\int \frac{x^m \cdot dx}{a^n + x^n} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)a^n} - \frac{x^{m+1+n}}{(m+1+n)a^{2n}} + \frac{x^{m+1+2n}}{(m+1+2n)a^{3n}} - \ldots\ldots + C,$$

а по другомъ реду

$$\int \frac{x^m \cdot dx}{a^n + x^n} = \frac{1}{(m+1-n)x^{n-(m+1)}} - \frac{a^n}{(m+1-2n)x^{2n-(m+1)}} + \frac{a^{2n}}{(m+1-3n)x^{3n-(m+1)}} - \ldots + C.$$

Ако є $m+1=rn$, **т. є. неко вишестручно** n, **онда у овомъ последнѣмъ реду постає именитель** $m+1-rn=0$, **и зато дотичный чланъ** ∞. **То насъ несме збунити, єръ є нстый чланъ у такомъ случаю пре интеграленя био** $\pm a^{(r-1)n} \cdot \frac{dx}{x}$, **и зато нѣговъ интегралъ** $\pm a^{(r-1)n} \cdot lx$. **Появили се дакле таково што, онда место сумнителнога члана треба поставити одма ову последню нѣгову вредность.**

Ако при горньимъ редовима за $\int \frac{x^m \cdot dx}{a^n + x^n}$ **узмемо** $m = 0$,

$n=2$, $a=1$, **слѣдує по првомъ**

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots + C,$$ **а по другомъ**

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{1.x} + \frac{1}{3.x^3} - \frac{1}{5.x^5} + \ldots\ldots + C.$$

Како є пакъ по обр. 12. § 86. точно $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,(tang = x)$, то имамо по првомъ

$$arc\,(tang = x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots + C,$$

а по другомъ

$$arc\,(tang = x) = -\frac{1}{1.x} + \frac{1}{3.x^3} - \frac{1}{5.x^5} + \ldots + C.$$

Стављаюћи у првой одъ ове две єдначине $x = 0$, слѣдуе $C = 0$, и зато

$$arc\,(tang = x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots\ldots;$$

познатый редъ изъ I. Ч. § 165.

Узимаюћи пакъ у другой єдначини $x = \infty$; добыямо због

$$arc\,(tang = \infty) = \frac{\pi}{2},\ C = \frac{\pi}{2},\ \text{и зато}$$

$$arc\,(tang = x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{1.x} + \frac{1}{3.x^3} - \frac{1}{5.x^5} + \ldots\ldots$$

Првый є одъ ова два реда за лукъ тангенте тимъ сбирльивіи, па и употребителніи, штогодъ є x манѣ, другій пакъ то сбирльивіи и способніи за употребльѣнѣ, штогодъ є x веће.

3.) За $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ имамо по биномномъ образцу

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots\ldots,$$

и зато

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^4}{7} + \ldots + C.$$

Овай истый интегралъ нађенъ є у 11. образцу § 86. точно $= arc\,(sin = x)$. Слѣдує дакле

$$arc\,(sin - x) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + C.$$

Пошто пакъ овай редъ мора да стои за лукъ свакогъ синуса, па и $sin = 0$, а за тай є $arc\,(sin = 0) = 0$, то слѣдує $C = 0$, и зато коначно

$$arc\,(sin = x) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots,$$

сасвимъ онако, каошто смо га нашли у § 165. I. Ч.

4.) У име $\int dx\sqrt{2ax - x^2}$ имамо опетъ по биномномъ образцу

$$\sqrt{2ax - x^2} = (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2a}\,.\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2a}\cdot\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2a} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\left(\frac{x}{2a}\right)^2 - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\left(\frac{x}{2a}\right)^3 - \ldots\right]$$

$$= \sqrt{2a}\,.\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{4a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}}}{8a^3} - \ldots\right).$$

Мора быти дакле траженый

$$\int dx\sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{2a}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2a} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}}}{4a^2} - \ldots\right)$$

$$= 2x\sqrt{2ax}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2a} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{x^2}{4a^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{9}\cdot\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{8a^3} - \ldots\right) + C.$$

На истый начинъ налазимо

$$5.)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{^2\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2a}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^2}{4a^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{8a^3}+\ldots\ldots\right)+C,$$

$$6.)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots\ldots+C,$$

$$7.)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=lx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{x^4}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{x^6}$$

$$-\ldots\ldots+C.$$

Поставляюћи пакъ за овай истый интегралъ найпре $x=1+z$, дакле $dx=dz$, а $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2z+z^2}$, налазимо іошъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{dz}{\sqrt{2z+z^2}}=\sqrt{2z}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^2}{4}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^3}{8}+\ldots\ldots\right)$$

$$=\sqrt{2\,(x-1)}\cdot\left[1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^3+\ldots\right]+C.$$

8.) У име $\int x^m.dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$, имамо

$$(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{r}{s}}.(1+\frac{b}{a}x^n)^{\frac{r}{s}}$$

$$=a^{\frac{r}{s}}\cdot\left[1+\frac{r}{s}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)x^n+\frac{r^{2|-s}}{2s}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2\cdot x^{2n}\right.$$

$$\left.+\frac{r^{3|-s}}{2.3.s}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3\cdot x^{3n}+\ldots\ldots\right],$$

или

$$x^m . dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = x^{m+\frac{nr}{s}}\, dx(b+ax^{-n})^{\frac{r}{s}}$$

$$= x^{m+\frac{nr}{s}}\, dx\,.\,b^{\frac{r}{s}}\left(1+\frac{a}{b}\,x^{-n}\right)^{\frac{r}{s}}$$

$$= x^{m+\frac{nr}{s}}\, dx\,.\,b^{\frac{r}{s}}.\left[1+\frac{r}{s}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)x^{-n}\right.$$

$$\left.+\frac{r^{2|-s}}{2!\,s^2}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2 x^{-2n}+\ldots\ldots\right].$$

Дакле є по првомъ изразу као редъ растући степена' одъ x

$$\int x^m . dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{r}{s}}\cdot\left[\frac{x^{m+1}}{(m+1)}+\frac{r}{s}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)\frac{x^{(m+1)+n}}{(m+1)+n}\right.$$

$$+\frac{r^{2|-s}}{2!\,s^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\cdot\frac{x^{(m+1)+2n}}{(m+1)+2n}+\frac{r^{3|-s}}{3!\,s^3}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3\cdot\frac{x^{(m+1)+3n}}{(m+1)+3n}$$

$$\left.+\ldots\ldots\ldots\right]+C,$$

а по другомъ, као редъ падаюћи степена' одъ x,

$$\int x^m . dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = b^{\frac{r}{s}}\cdot\left[\frac{s\,x^{m+1+\frac{nr}{s}}}{nr+s\,(m+1)}+r\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{x^{m+1+\frac{nr}{s}-n}}{nr+s(m+1-n)}\right.$$

$$+\frac{r^{2|-s}}{2s}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\frac{x^{m+1+\frac{nr}{s}-2n}}{nr+s(m+1-2n)}$$

$$\left.+\ldots\ldots\ldots\right]+C.$$

9.) За $\int f(x)a^x . dx$. узмимо место a^x њговъ, изъ I. Ч. § 161. познатый редъ. Слѣдуе съ места уобште вопросный

$$\int f(x)\,a^x . dx = \int f(x)\,dx + la\int f(x)\,x\,dx + \frac{l^2a}{2!}\int f(x)x^2 . dx + ..$$

Ако є $f(x)$ н. п. x^n, добыямо одтудъ

$$\alpha.)\ \int x^n . a^x . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{la}{n+2} x^{n+2} + \frac{l^2 a}{2!(n+3)} x^{n+3} + .. + C,$$

Ако є пакъ $f(x) = \frac{1}{x}$, налазимо

$$\beta.)\ \int a^x . \frac{dx}{x} = lx + la . x + \frac{l^2 a}{2!} . \frac{x^2}{2} + \frac{l^3 a}{3!} . \frac{x^3}{3} + ... + C,$$

коє ніє ништа друго, но у § 117. и 119. споменутый **интегралный логаритамъ.**

Ставляюћи у овомъ образцу $a^x = z$, слѣдує због $x = \frac{lz}{la}$, $dx = \frac{dz}{z\,la}$, а $lx = {}^2lz - {}^2la = llz - lla$, $\int \frac{z\,dz}{z\,la} \times \times \frac{la}{lz}$, т. є. найпосле

$$\gamma.)\ \int \frac{dz}{lz} = {}^2lz + lz + \frac{1}{2} . \frac{l^2 z}{2!} + \frac{1}{3} . \frac{l^3 z}{3!} + ... + C.$$

§ 131.

Осимъ начина коимъ налазимо интеграле помоћу безкрайны редова, увиђамо изъ предходећегъ §-а іошъ, како се неке функціє могу интеграленѣмъ развити у безкрайне редове, и то є у истомъ, поредъ главне намере, безъ сумнѣ тако ясно показано, да бы, спрамъ граница овога дела, права дангуба была, говорити іошъ и далѣ што о томе послу. То напоминюћи завршуємо вопросный предметъ съ томъ іошъ важномъ пряметбомъ: како при интеграленю съ безкрайнимъ редовима ніє непремено нуждно, да дата диференціална функція буде изражена као редъ самы монома по x; довольно є, ако место нѣ изнаћемо само редъ таковы чланова, коє смо у станю интегралити помоћу доякошньи упутства. Примери слѣдуюћегъ §-а обяснит'ће то већма.

§ 132.

1.) Тражи се $\int \frac{dx\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

У име тога имамо по биномномъ правилу

$$\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}=(1-\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2x^2-\frac{1.1}{2.4}\cdot\varepsilon^4x^4$$

$$-\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\varepsilon^6x^6-\ldots,$$

и зато

$$\int\frac{dx.\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\int\Big(1-\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2x^2-\frac{1.1}{2.4}\cdot\varepsilon^4x^4$$

$$-\frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^6x^6-\ldots\ldots\Big)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\varepsilon^2\int\frac{x^2.dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4\int\frac{x^4.dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$-\frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^6\int\frac{x^6.dx}{\sqrt{1-x^2}}-\ldots\ldots+C.$$

Тимъ начиномъ дакле сведенъ є вопросный интегралъ на онай $\int\frac{x^n.dx}{\sqrt{1-x^2}}$, **и може се садъ лако далѣ израдити по §-у 111.**

Поступаюћи по томъ §-у, налазимо найпосле

$$\int\frac{dx\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=A+\frac{1}{2}\varepsilon^2\Big(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}A\Big)$$

$$+\frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4\cdot\Big[\Big(\frac{x^3}{4}+\frac{3.1}{4.2}x\Big)\sqrt{1-x^2}-\frac{3.1}{4.2}A\Big]$$

$$+\frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^6\cdot\Big[\Big(\frac{x^5}{6}+\frac{5\,1}{6.4}x^3+\frac{5.3.1}{6.4.2}x\Big)\sqrt{1-x^2}$$

$$-\frac{5.3.1}{6.4.2}A\Big]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+C,$$

при чему в $A = arc\,(sin = x)$,

2.) Ште се $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+x)(1-x^2)}}$.

У име тога можемо рећи

$$\frac{1}{\sqrt{(a+x)(1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (a+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1.3}{2.4} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \ldots\ldots\right],$$

дакле

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+x)(1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2a\sqrt{a}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$+ \frac{1.3}{2.4.a^2\sqrt{a}} \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \ldots\ldots + C,$$

израженъ самимъ већъ познатимъ интегралима.

3.) Подобно можемо при $\int \frac{dx}{\sqrt{(a-x).(2ax-x^2)}}$ рећи:

$\frac{1}{\sqrt{(a-x)(2ax-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}} (a-x)^{-\frac{1}{2}}$, чимъ га довођимо на интеграле вида $\int \frac{A\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, кои су доякo већъ изнађени.

Даљій посао за овай примеръ оставлямъ прилѣжномъ момъ ученику, и споминѣмъ само іошъ, да сви садъ показани интеграли принадлеже елиптичнимъ трансцендентима.

к.) Опредѣлѣни интеграли, или интеграленѣ међу известнимъ границама.

§ 133.

У §§-ма 81. и 82. уверили смо се, да свакій интегралъ, као обштій, мора садржати некій, іошъ непознатый сталный брой C; у првомъ одъ та два §-а пакъ наговестили смо, како се тай сталный брой одкрива тиме, што є по самой природи дотичнога задатка, позната вредность вопроснога интеграла, при известной некой вредности пременльивога броя. Ако є т. є. уобште $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$, а изъ природе задатка зна се, да є за $x = a$ вредность тога интеграла $= A$, онда имамо $A = \varphi(a) + C$, и одтудъ $C = A - \varphi(a)$, тако да после стои, као особитый интегралъ, $\int f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a) + A$.

Томе придаємо садъ іошъ слѣдуюће:

1.) Пошто є брой C одъ x независанъ, то онъ задржава свою, по природнимъ условіяма задатка за $x = a$ добывену вредность $A - \varphi(a)$, за сваку другу вредность броя x дотле, докъ се коіомъ одъ ньи ненаруши наставность функція $f(x)$ или $\varphi(x)$. Буде ли н. п. ова последня функція како за $x = \alpha$, тако и за $x = \beta$ равна $\frac{1}{0}$, али се то съ њомъ иначе ни за какву другу, између та два броя α и β лежећу вредность одъ x недогаћа, и $x = a$ притомъ лежи између α и β: онда брой C, безъ сваке сумнѣ, задржава за свако друго, између $x = \alpha$ и $x = \beta$ лежеће x ону вредность, кою є добыо за $x = a$, али може врло лако постати друге вредности за другу какву, изванъ тій граница' лежећу вредность одъ x, и то: другу за доистне вредности тога броя до α, а опетъ другу за такове нѣгове вредности одъ β на выше, ако є т. є. $\alpha < \beta$. — О томе уверитћемо се врло често доцніе, при употребляваню инфинитезималногъ рачуна у аналитичной геометріи.

2.) Ако є вредность општегъ каквогъ интеграла за $x = a$ по самой природи задатка равна нулли, или треба да є толика, онда каже се: дотичный **интегралъ** за**починѣ** са $x = a$, и C є притомъ очевидно такођеръ $= 0$. Изъ горнѣга пакъ увиђа се, да тако изнађена особита вредность тогъ интеграла само дотле постои, докъ се каквомъ наставномъ вредности броя x до a, или одъ a далѣ, непоремети наставность функціе $f(x)$ или $\varphi(x)$.

3.) Ако се у особитомъ, са $x = a$ започинюћемъ интегралу узме место x іошъ и друга известна вредность b, онда є вредность истога интеграла подпуно определѣна, и престае дакле быти функція одъ x. Такавъ се интегралъ после зове **определѣнъ**, и каже се о нѣму, да **започинѣ** са $x = a$, а **престае** са $x = b$, или **узетъ** є **одъ** $x = a$ **до** $x = b$, или **определѣнъ** є **међу границама** $x = a$ и $x = b$.

Обично помишля се притомъ брой $b > a$, али може быти и $< a$, но на свакій начинъ мора се наодити међу онимъ наставнимъ вредностима броя x до a или одъ a далѣ, за коє брой C задржава єдну исту вредность, иначе бы вредносъ интеграла по горнѣму лако могла быти погрешна.

§ 134.

Ако є $\varphi(x)$ интеграленѣмъ добывена особита вредность за $\int f(x) . dx$, онда є по предходећему

1.) $\varphi(x) + C$ **подпуный, обштій** или **неопределѣный** $\int$,

2.) $\varphi(x) - \varphi(a)$ **са** a **започинюћій интегралъ**, а

3.) $\varphi(b) - \varphi(a)$ **определѣный интегралъ међу границама** $x = a$ и $x = b$.

Првый представля се просто са $\int f(x)\,dx$, другій са $\int_a f(x)\,dx$ или $\int_a^x f(x)\,dx$, а трећій са $\int_a^b f(x)\,dx$, тако дакле, да є

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C, \int_a f(x)dx = \int_a^x f(x)dx = \varphi(x) - \varphi(a),$$

а $\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$, али ова два последня подъ горе изреченимъ условіяма, а трећій нарочно само дотле те вредности, докъ $f(x)$ ни за $x = a$, ни за $x = b$, а іошъ манѣ за кою другу средню вредность одъ x непостає $\frac{1}{0}$, или другогъ каквогъ, нѣну наставностъ нарушаваюћегъ вида. —

Особита свойства определѣны интеграла, као я ньиова велика важность по томе, што при употребляваню интегралногъ рачуна съ таковимъ, т. є. међу известнимъ границама узетимъ интегралима посла имамо, — изискую, да ій посматрамо нешто поизближе.

§ 135.

Ако є $\int f(x)\,dx = \varphi(x)$, дакле по понятію интеграла $\varphi_1(x) = f(x)$, онда є изчезльиво мала премена функціе $\varphi(x)$ збогъ изчезльиво мале премене dx броя x, $d\varphi(x) = \varphi_1(x)\,dx = f(x)\,dx$. Дакле, ако место x узмемо найпре a, а после редомъ $a + dx$, $a + 2dx$, $a + 3dx$, ... докъ найпосле b, добыямо очевидно редомъ найпре

$\varphi(a)$, као прву слѣдуюћу вредность

$\varphi(a) + f(x)_a . dx$, као другу

$\varphi(a) + f(x)_a . dx + f(x)_{a+dx} . dx$, као трећу

$\varphi(a) + f(x)_a . dx + f(x)_{a+dx} . dx + f(x)_{a+2dx} . dx$,

. . . . . , докъ найпосле

$$\varphi(b) = \varphi(a) + f(x)_a . dx + f(x)_{a+dx} . dx + f(x)_{a+2dx} . dx + \ldots + f(x)_{b-2dx} . dx + f(x)_{b-dx} . dx,$$

тако да є затимъ

$$\varphi(b)-\varphi(a)=[f(x)_{a}+f(x)_{a+dx}+f(x)_{a+2dx}+\ldots+f(x)_{b-2dx}+f(x)_{b-dx}]\,.\,dx$$

$$=[\Sigma f(x)_{a+\mu dx}]\,.\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha.,$$

т. є. $\varphi(b)-\varphi(a)$ равно алгебрайскомъ сбиру свію изчезльиво малы премена' ѳункціе $\varphi(x)$, коє є она наставно претрпила одъ $x=a$ до $x=b$.

Тиме є оправдано употребляванѣ сбирнога знака $\int$, (S, почетно писме речи сумма, сбиръ) за определѣне интеграле. Пошто є пакъ притомъ брой b сасвимъ общтій или произволянъ, па се зато може заменути и са x, то су оправдани уєдно и остали изрази подъ 1. и 2. у предходећемъ §-у, докъ подъ речи **интегралъ** разумемо **сбиръ диференціала.**

О основаности докученя подъ α). уверитће насъ подпуно слѣдующій

§ 136.

Ако є $a<b$, и помислимо разлику $b-a$ поделѣну на безбройно млого єднаки частій, представляюћи сваку са dx, онда є сбиръ безбройно многи производа' $f(x)\,dx$ за сваку поєдину наставну (т. є. са dx разликуюћу се) вредность броя x, одъ $x=a$ до $x=b$, нико друго но $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$, т. є. $\varphi(b)-\varphi(a)$, ако є интеграленѣмъ нађена вредность $\varphi(x)$; али то стои само дотле, докъ ѳункція $f(x)$ за ниєдну одъ тій вредностій између a и b непостає $\frac{1}{0}$, или каквогъ другогъ вида, съ коимъ се нѣна наставность нарушава. Ево зашто.

Пошто є $\varphi_1(x)=f(x)$, то є $\varphi_2(x)=f_1(x)$, $\varphi_3(x)=f_2(x)$, и т. д., и зато по телеровомъ образцу за ѳункція єдногъ пременльивогъ броя (§ 26.):

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=f(x)\,h+f_1(x)\frac{h^2}{2\,!}+f_2(x)\cdot\frac{h^3}{3\,!}+\ldots\ldots \quad (\beta.$$

Узимаюħи овде $h = dx = \frac{b-a}{n}$, а притомъ n као безкрайно великій целый брой, — поставляюħи затимъ за x найпре a, а после редомъ $a+dx$, $a+2dx$, $a+3dx$, ... докъ найпосле $a+(n-1)\,dx = b-dx$, — добыямо по реду

$$\varphi(a+dx)-\varphi(a)=f(x)_{a}\,dx+f_1(x)_{a}.\frac{d^2x}{2!}+f_2(x)_{a}.\frac{d^3x}{3!}+\cdots\cdots$$

$$\varphi(a+2dx)-\varphi(a+dx)=f(x)_{a+dx}.dx+f_1(x)_{a+dx}.\frac{d^2x}{2!}+f_2(x)_{a+dx}.\frac{d^3x}{3!}+\cdots$$

$$\varphi(a+3dx)-\varphi(a+2dx)=f(x)_{a+2dx}.dx+f_1(x)_{a+2dx}.\frac{d^2x}{2!}$$

$$+f_2(x)_{a+2dx}.\frac{d^3x}{3!}+\cdots\cdots\cdots$$

. . . . . .

$$\varphi(b)-\varphi[a+(n-1)\,dx=b-dx]$$

$$=f(x)_{b-dx}.dx+f_1(x)_{b-dx}.\frac{d^2x}{2!}+f_2(x)_{b-dx}.\frac{d^3x}{3!}+\cdots\cdots\cdots,$$

а ако све ове єдначине саберемо:

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\Sigma f(x)_{a+\mu dx}.dx+\Sigma f_1(x)_{a+\mu dx}.\frac{d^2x}{2!}$$

$$+\Sigma f_2(x)_{a+\mu dx}.\frac{d^3x}{3!}+\cdots\cdots\cdots\quad(\gamma,$$

при чему $\Sigma f(x)_{a+\mu dx}.dx$ представля сбиръ $f(x)_{a}\,dx+f(x)_{a+dx}.dx+$ $+f(x)_{a+2dx}.dx+\cdots\cdots$; $\Sigma f_1(x)_{a+\mu dx}.\frac{d^2x}{2!}$ сбиръ $f_1(x)_{a}.\frac{d^2x}{2!}+$ $+f_1(x)_{a+dx}.\frac{d^2x}{2!}+f_1(x)_{a+2dx}.\frac{d^2x}{2!}+\cdots\cdots$, и т. д., на тай начинъ, да место μ валя редомъ узимати 0, 1, 2, ... $(n-1)$.

Обзирући се пакъ при той єдначини γ) на то, да є dx изчезльиво малый брой, те да зато сви чланови деснога реда съ другимъ започевши спрамъ првому, као изчезльиво мали выши редова изчезаваю, — остає намъ само

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{a+\mu dx} f(x)\,.\,dx \;.\;.\;.\;.\;.\;(\delta.,$$

чимъ є, незаборавляюћи ко є $\sum_{a+\mu dx} f(x)\,.\,dx$, докученѣ подъ α) сасвимъ обистинѣно.

§ 137.

Ако су α, β и γ између a и b лежеће вредности, а интеграленѣмъ добыли смо $\int f(x)\,dx=\varphi(x)$, онда є

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx=\varphi(\alpha)-\varphi(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha),$$

$$\int_\beta^\gamma f(x)\,dx=\varphi(\gamma)-\varphi(\beta),$$

$\int_\gamma^b f(x)\,dx=\varphi(b)-\varphi(\gamma)$, а ако све ове єдначине саберемо

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx+\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_\beta^\gamma f(x)\,dx+\int_\gamma^b f(x)dx=\varphi(b)-\varphi(a)$$
$$=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Изъ овога види се, како определѣный $\int_a^b f(x)\,dx$ можемо добыти такођеръ и на тай начинъ, да између a и b узмемо произвольно колико средньи вредностій α, β, γ, . . λ, па онда определимо редомъ $\int_a^\alpha$, $\int_\alpha^\beta$, $\int_\beta^\gamma$, ... $\int_\lambda^b$, и све те интеграле саберемо; овай сбиръ т. є. быт'ће траженый $\int_a^b$.

§ 138.

Ако є $f(x)$ за сваку наставну вредность броя x одъ $x=a$ до $x=b$ положна, а $\varphi(x)_{g}$ и $\varphi(x)_{k}$ представляю прва найвећу, а друга найманю вредность функціе $\varphi(x)$, коє она прима за оне наставне вредности броя x, онда є, каошто се лако увиђа,

$$[\varphi(x)_{a}.f(x)_{a}+\varphi(x)_{a+dx}.f(x)_{a+dx}+\varphi(x)_{a+2dx}.f(x)_{a+2dx}+\ldots.+\varphi(x)_{b-dx}.f(x)_{b-dx}]\,dx$$

$$=\Sigma[\varphi(x)_{a+\mu dx}.f(x)_{a+\mu dx}.dx]<\{[\varphi(x)_{g}.f(x)_{a}+\varphi(x)_{g}.f(x)_{a+dx}+..+\varphi(x)_{g}.f(x)_{b-dx}]dx$$

$$=\varphi(x)_{g}[f(x)_{a}+f(x)_{a+dx}+f(x)_{a+2dx}+..+f(x)_{b-dx}]dx$$

$$=\varphi(x)_{g}.\Sigma[f(x)_{a+\mu dx}.dx]\},\ \text{а}$$

$$>\{[\varphi(x)_{k}.f(x)_{a}+\varphi(x)_{k}.f(x)_{a+dx}+..+\varphi(x)_{k}.f(x)_{b-dx}]dx$$

$$=\varphi(x)_{k}[f(x)_{a}+f(x)_{a+dx}+f(x)_{a+2dx}+..+f(x)_{b-dx}]dx$$

$$=\varphi(x)_{k}.\Sigma[f(x)_{a+\mu dx}.dx]\}.$$

Но ово по § 136. ништа друго незначи, него да є

$$\int_a^b \varphi(x).f(x)\,dx < \varphi(x)_{g}.\int_a^b f(x)\,dx,\ \text{а}$$

$$> \varphi(x)_{k}.\int_a^b f(x)\,dx.$$

Вредность определѣногъ $\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx$ лежи дакле у вопросномъ случаю међу границама $\varphi(x)_{g}.\int_a^b f(x)\,dx$ и $\varphi(x)_{k}.\int_a^b f(x)\,dx$, маня є т. є одъ прве, а већа одъ друге.

§ 139.

1.) Ако у образцу $\beta.$, § 136. замислимо само врло велико n, а не безкрайно, дакле место h узмемо не изчезльиво dx, но само врло малый брой $\delta = \frac{b-a}{n}$, — и ако после заменемо x редомъ съ a, $a+\delta$, $a+2\delta$, $a+3\delta$, ... докъ найпосле съ $a+(n-1)\delta = b-\delta$, — добыямо истимъ путемъ као тамо:

$$\int_a^b f(x)dx = \delta . \sum_{a+\mu\delta} f(x) + \frac{\delta^2}{2!} \cdot \sum_{a+\mu\delta} f_1(x) + \frac{\delta^3}{3!} \cdot \sum_{a+\mu\delta} f_2(x) + \ldots \quad (m.;$$

пренебрегаваюћи овде пакъ све чланове съ вышимъ степенима одъ δ, остає за **приближну** вредность вопроснога интеграла, образацъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \delta . \sum_{a+\mu\delta} f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I.,$$

у комъ є, као што знамо изъ помеиутога §-а,

$$\sum_{a+\mu\delta} f(x) = f(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f(x),$$
$$a \quad a+\delta \quad a+2\delta \quad a+(n-1)\delta = b-\delta$$

а притомъ опетъ по горнѣму $\delta = \frac{b-a}{n}$.

2.) Пошто є $\int f_1(x)\,dx = f(x)$, $\int f_2(x)\,dx = f_1(x)$, и т. д., то є истимъ начиномъ као горе **приближный** $\int_a^b f_1(x)\,dx$, т. є.

$$f(b) - f(a) = \delta . \sum_{a+\mu\delta} f_1(x), \quad \text{а}$$

$$f_1(b) - f_1(a) = \delta . \sum_{a+\mu\delta} f_2(x),$$

и зато, ако ове вредности узмемо у єдначину m, притомъ пакъ опетъ выше степене одъ δ пренебрегнемо, за **приближну** вредность вопроснога интеграла другій образацъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \delta . \left\{ \sum_{a+\mu\delta} f(x) + \frac{1}{2}\,[f(b) - f(a)] \right\} \ldots \quad (II.,$$

3.) Узимаюħи найпосле у овомъ образцу $f_1(x)$ и $f_2(x)$ место $f(x)$, добыямо изъ истогъ узрока као мало ıре

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f_1(x)\,dx = \delta . \left\{ \Sigma f_1(x) \underset{a+\mu\delta}{} + \frac{1}{2} [f_1(b) - f_1(a)] \right\}$$

$$f_1(b) - f_1(a) = \int_a^b f_2(x)\,dx = \delta . \left\{ \Sigma f_2(x) \underset{a+\mu\delta}{} + \frac{1}{2} [f_2(b) - f_2(a)] \right\} .$$

Слħдуюħе пакъ одавде вредности за $\Sigma f_1(x)$ и $\Sigma f_2(x)$ у єдначини m заменююħи, и притомъ чланове са δ^3 и вышимъ нħговимъ степенима пренебрегаваюħи, добыямо за **приближну** вредностк вопроснога интеграла трећій образацъ

$$\int_a^b f(x) = \delta \left\{ \Sigma f(x) \underset{a+\mu\delta}{} + \frac{1}{2} [f(b) - f(a)] \right\} - \frac{\delta^2}{12} [f_1(b) - f_1(a)] . \text{ III.}$$

Нађена ова три образца служе, каошто при свакомъ наговестисмо, за **приближно** израчунаванħ вредности $\int_a^b f(x)dx$, у случаю, гди обштій интегралъ немамо, или га неможемо изнаħи, или га најпосле неħемо тражити (можда због врло тешкога посла, кои намъ задає), — а природа дотичнога задатка приближне вредности допушта. Лако є пакъ увидити, да ħе тако добывене вредности быти све точніе, штогодъ є n веħій, дакле $\delta = \frac{b-a}{n}$ маньій брой, и штогодъ се вредности одъ $f(x)$ при заменьиваню броя x съ a, $a+\delta$, $a+2\delta$, ... споріе увеħаваю или умаляваю. — За образацъ II. можемо нарочно іошъ приметити, како при нħговомъ употребляваню неморамо имати функцію $f(x)$, ако само знамо или имамо $n+1$ нħны вредностій $f(x)$, $f(x)$, $f(x)$, ... $f(x)$.
a $a+\delta$ $a+2\delta$ b

§ 140.

Узмимо баръ єданъ примеръ за обяснħнħ употребляваня тій образаца.

Тражи се $\int_a^{a+\omega} \frac{dx}{x}$, т. е. $l(a+\omega) - la = l\frac{a+\omega}{a}$.

Ту је $f(x) = \frac{1}{x}$, $b = a+\omega$, $\delta = \frac{b-a}{n} = \frac{\omega}{n}$. Имамо дакле $f_1(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f_2(x) = \frac{2}{x^3}$, $f(x)_a = \frac{1}{a}$, $f(x)_{a+\delta} = \frac{n}{na+\omega}$,

$f(x)_{a+2\delta} = \frac{n}{na+2\omega}$, $f(x)_{a+3\delta} = \frac{n}{na+3\omega}$, . . $f(x)_{a+(n-1)\delta} = \frac{n}{na+(n-1)\omega}$,

$f(x)_{a+\omega} = \frac{1}{a+\omega}$, и зато

по образцу I.

$$l\frac{a+\omega}{a} = \int_a^{a+\omega} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\omega}{n}\left[\frac{1}{a} + \frac{n}{na+\omega} + \frac{n}{na+2\omega} + \frac{n}{na+3\omega} + \cdots + \frac{n}{na+(n-1)\omega}\right]$$

$$= \omega\cdot\left[\frac{1}{na} + \frac{1}{na+\omega} + \frac{1}{na+2\omega} + \frac{1}{na+3\omega} + \cdots + \frac{n}{na+(n-1)\omega}\right],$$

по образцу II.

$$l\frac{a+\omega}{a} = \int_a^{a+\omega} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\omega}{n}\left[\frac{1}{a} + \frac{n}{na+\omega} + \frac{n}{na+2\omega} + \cdots + \frac{n}{na+(n-1)\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+\omega} - \frac{1}{a}\right)\right]$$

$$= \omega\cdot\left[\frac{1}{na} + \frac{1}{na+\omega} + \frac{1}{na+2\omega} + \cdots + \frac{1}{na+(n-1)\omega}\right] - \frac{\omega^2}{2na(a+\omega)},$$

најпосле по образцу III.

$$l\frac{a+\omega}{a} = \int_a^{a+\omega} \frac{dx}{x}$$

$$= \omega\cdot\left[\frac{1}{na} + \frac{1}{na+\omega} + \frac{1}{na+2\omega} + \cdots + \frac{1}{na+(n-1)\omega}\right]$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{\omega^2}{na(a+\omega)} - \frac{1}{12}\cdot\frac{\omega^3(2a+\omega)}{a^2(a+\omega)^2}.$$

Узмимо садъ за упражненѣ у изтраживаню опредѣлѣны интеграла'

Неколико примера.

§ 141.

1.) Тражи се $\int_0^a \frac{x^m . dx}{\sqrt{ax - x^2}}$.

Ако узмемо у образцу *а.*) подъ 5., § 111. a место $2a$, слѣдує уобште

$$\int \frac{x^m . dx}{\sqrt{ax - x^2}} = -\frac{1}{m} x^{m-\frac{1}{2}} . \sqrt{a - x} + \frac{a(2m-1)}{2m} \int \frac{x^{m-1} . dx}{\sqrt{ax - x^2}} .$$

Примећаваюћи овде пакъ, како првый чланъ десне части постає и за $x = 0$ и за $x = a$ раванъ нулли, можемо одма ставити

$$\int_0^a \frac{x^m . dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{a(2m-1)}{2m} . \int_0^a \frac{x^{m-1} . dx}{\sqrt{ax - x^2}} \ldots\ldots (\alpha.,$$

и имамо у томе образацъ, коимъ доводимо вопросный интегралъ на друге ниже истога рода, и одма га тако и одкривамо. Ево:

Обзиромъ на то, да є по 14. обр. § 86. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = arc\,(sin\,v . = \frac{2}{a} x)$, и зато $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = arc\,(sin\,v . = 2) - arc\,(sin\,v . = 0) = \pi - 0 = \pi$, — добыямо изъ нађенога образца α.), ставляюћи у истомъ по реду $m = 1, 2, 3, \ldots$.

$$\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{a}{2} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{a}{2} \pi ,$$

$$\int_0^a \frac{x^2 . dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{3}{4} a \int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{1.3}{2.4} a^2 . \pi ,$$

$$\int_0^a \frac{x^3 . dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{5}{6} a \int_0^a \frac{x^2 . dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{1.3.5}{2.4.6} a^3 . \pi ,$$

и т. д. докъ найпосле

$$\int_0^a \frac{x^m . dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{1 . 3 . 5 \ldots . (2m - 1)}{2 . 4 . 6 \ldots \ldots \ldots 2m} a^m . \pi .$$

2.) Пыта се за интегралъ

$$\tau = -\int_0^a \frac{r dx}{2\sqrt{g(a-x)(2rx-x^2)}} = -\frac{r}{2\sqrt{g}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)(2r-x)}}$$

$$= -\frac{r}{2\sqrt{g}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2r - x}} .$$

По биномномъ правилу добыямо

$$\frac{1}{\sqrt{2r-x}} = (2r - x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \cdot \left(1 - \frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2r}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2r}\right) + \frac{1.3}{2.4} \cdot \left(\frac{x}{2r}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \left(\frac{x}{2r}\right)^3 + \ldots\right];$$

зато є, ако ову вредность у вопросномъ интегралу узмемо и онда множенѣ са $\frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}}$ свршимо,

$$\tau = -\frac{r}{2\sqrt{2rg}} \cdot \left[\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2r} \int_0^a \frac{x\, dx}{\sqrt{ax - x^2}}\right.$$

$$\left. + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{4r^2} \int_0^a \frac{x^2 . dx}{\sqrt{ax - x^2}} + \ldots\ldots\ldots\right] .$$

Но ови су интеграли сви већъ познати изъ предходећегъ примера. Узимаюћи дакле њиове у томе нађене вредности, слѣдує, ако уєдно брой π извадимо као заєдничкогъ чинителя, коначно траженый интегралъ

$$\tau = -\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{2r}\right) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{2r}\right)^2\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{2r}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\right].$$

3.) Потребанъ є $\int_0^a \frac{dx.\sqrt{a^4 - c^2 x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Извлачећи найпре у броителю a^4, а у именителю a^2 као заєдничкога чинителя, и ставлxюћи после ради краткоће $\frac{c^2}{a^2} = \alpha^2$, а $\frac{x^2}{a^2} = z^2$, постає уобште

$$\int \frac{dx.\sqrt{a^4 - c^2 x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = a\int \frac{dz\sqrt{1-\alpha^2 z^2}}{\sqrt{1-z^2}} = a\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}(1-\alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= a\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 z^2 - \frac{1.1}{2^2.2!}\alpha^4 z^4 - \right.$$

$$\left. - \frac{1.3}{2^3.3!}\alpha^6 z^6 - \frac{1.3.5}{2^4.4!}\alpha^8 z^8 - \ldots\right)$$

$$= a\left[\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{1}{2}\alpha^2 \int \frac{z^2.dz}{\sqrt{1-z^2}}\right.$$

$$\left. - \frac{1.1}{2^2.2!}\alpha^4 \int \frac{z^4.dz}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{1.3}{2^3.3!}\alpha^6 \int \frac{z^6.dz}{\sqrt{1-z^2}} - \ldots\right].$$

По 11. обр. § 86. є $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = arc\,(sin = z)$, а по § 111. имамо

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{z^2.dz}{\sqrt{1-z^2}} &= -\frac{z}{2}\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}arc\,(sin = z),\\
\int \frac{z^4.dz}{\sqrt{1-z^2}} &= -\left(\frac{z^3}{4} + \frac{3.1}{4.2}z\right)\sqrt{1-z^2} + \frac{3.1}{4.2}arc\,(sin = z),\\
\int \frac{z^6.dz}{\sqrt{1-z^2}} &= -\left(\frac{z^5}{6} + \frac{5.1}{6.4}z^3 + \frac{5.3.1}{6.4.2}z\right)\sqrt{1-z^2} + \frac{5.3.1}{6.4.2}arc(sin\ z)
\end{aligned}\right\} t.$$

. . . . . .

Бытће дакле, ако повратимо вредность $z = \frac{x}{a}$, због $arc\,(sin = \frac{a}{a} = 1) = \frac{\pi}{2}$, а $arc\,(sin = 0) = 0$, —

$$\int_{x=0}^{x=a} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=a} \frac{z^2 . dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=a} \frac{z^4 . dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{3.1}{4.2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=a} \frac{z^6 . dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{5.3.1}{6.4.2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

. . . . . .

и зато съ овимъ вредности-ма, ако ій у предходећемъ изразу вопроснога интеграла заменемо, и уєдно $\frac{\pi}{2}$ као заєдничкога чинителя извучемо, истый

$$\int_0^a \frac{dx\sqrt{a^4 - c^2 x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{c^2}{a^2}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{c^3}{a^3}\right)^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\right].$$

4.) Ако горнѣ интеграле подъ $t.$) узмемо међу границама $z = 0$ и $z = 1$, добыямо прво зато, што є $arc\,(sin = 1)$ $\frac{\pi}{2}$, а $arc\,(sin = 0) = 0$, — друго пакъ зато што у сваком одъ ньи првый чланъ како за $z = 0$ тако и за $z = 1$ изчезава:

$$\int_0^1 \frac{z^2 . dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2}\, arc\,(sin = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{z^4 . dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{3.1}{4.2}\, arc\,(sin = 1) = \frac{3.1}{4.2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{z^6 . dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{5.3.1}{6.4.2}\, arc\,(sin = 1) = \frac{5.3.1}{6.4.2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

. . . . . .

$$\int_0^1 \frac{z^{2n} . dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1.3.5 \ldots\ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots\ldots 2n}.$$

Подобно слѣдую изъ интеграла съ безпарнимъ степенима одъ x у § 111. подъ 2., изменююћи само x са z:

$$\int_0^1 \frac{z\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = 1\,,$$

$$\int_0^1 \frac{z^3\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2}{3}\,,$$

$$\int_0^1 \frac{z^5\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2.4}{1.3}\,,$$

$$\int_0^1 \frac{z^7\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2.4.6}{1.3.5}\,,$$

. . . . . .

докъ найпосле

$$\int_0^1 \frac{z^{2n+1}\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\ldots\,2n}{3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,(2n+1)}$$

Дележи горньій интегралъ за парне степене одъ z са овимъ за безпарне, добыямо

$$\frac{\int_0^1 \frac{z^{2n}\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}}}{\int_0^1 \frac{z^{2n+1}\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}}} = \frac{\pi}{2}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,(2n-1)\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,\ldots\,(2n+1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,\ldots\,2n\,.\,2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,\ldots\,2n}\,.$$

$$= \frac{\pi}{2}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,(2n-1)\,(2n-1)\,.\,(2n+1)}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,\ldots\,2n\,.\,2n}\,.$$

Помишляюћи n врло велико, увиђамо лако, да ће се єданъ интегралъ одъ другогъ тимъ манѣ разликовати, штогодъ є исто n веће, и да међу ньима најпосле, ако є n безкрайно, готово никакве разлике више нема, дакле да за таково n поуздано можемо ставити

$$1 = \frac{\pi}{2}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,\ldots\ldots\,\text{у безкрайность}}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,\ldots\ldots\,\text{у безкрайность}}\,;$$

но одтудъ тадъ слѣдуе

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,\ldots\ldots}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,\ldots\ldots}\,,$$

већъ познатый Валисевъ изразъ (Ч. I. § 180.), да израчунаванѣ броя π.

л) Выши интеграли.

§ 142.

Ако место првогъ диференціала функціе y променльивога броя x имамо некій нѣнъ вышій диференціалъ, н. п. n. диференціалъ, онда є иста функціа у односу на тай датый или познатый диференціалъ уобште **вышій**, а у известномъ томъ случаю n. интегралъ, и добыямо є изъ истогъ диференціала интегралећи га застопце n пута, каошто є то већъ наговешћено у § 84.

Да бы ово больма разумели, а уєдно іошъ и нешто друго притомъ увидили, узмимо найпре да є

$$^2dy = f(x)\, d^2x.$$

У томъ случаю имамо

$$\frac{^2dy}{dx} = f(x)\, dx, \quad \text{или пошто є } dx \text{ сталанъ брой,}$$

$$d\,\frac{dy}{dx} = f(x)\, dx. \quad \text{Дакле є}$$

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)\, dx + C_1, \quad \text{а}$$

$$dy = dx \cdot \int f(x)\, dx + C_1\, dx, \quad \text{и зато}$$

$$y = {}^2\!\int f(x)\, d^2x = \int dx \int f(x)\, dx + \int C_1\, dx + C_2$$

$$= \int dx \int f(x)\, dx + C_1 x + C_2.$$

Подобно имамо, ако є $^3dy = \varphi(x)\, d^3x$,

$$\frac{^3dy}{d^2x} = d\,\frac{^2dy}{d^2x} = \varphi(x)\, dx, \quad \text{тако да є}$$

$$\frac{^2dy}{d^2x} = \int \varphi(x)\, dx + C_1,$$

$\frac{^2dy}{dx} = d\frac{dy}{dx} = dx \cdot \int \varphi(x)\,dx + C_1\,dx$, одтудъ после

$\frac{dy}{dx} = \int dx \int \varphi(x)\,dx + C_1 x + C_2$, а

$dy = dx \cdot \int dx \int \varphi(x)\,dx + C_1 x dx + C_2\,dx$, и зато

коначно $y = {}^3\int \varphi(x)\,d^3x = \int dx \int dx \int \varphi(x)\,dx + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$, или ако $\frac{1}{2} C_1$ са $\mathfrak{C}_1$ изменемо

$$y = {}^3\int \varphi(x)\,d^3x = \int dx \int dx \int \varphi(x)\,dx + \mathfrak{C}_1 + C_2 x + C_3.$$

Овимъ є горнѣ изреченѣ безъ сумнѣ подпуно потврђено; али се одтудъ увиђа іошъ и то: да у вопросну функцію улазе онолико сталны, непознаты броєва, колико смо пута интегралили.

Да узмемо іошъ и кои примеръ.

1.) Тражи се y изъ $^3dy = \sin x \cdot d^3x$.

Ту имамо $\frac{^3dy}{d^2x} = d\frac{^2dy}{d^2x} = \sin x \cdot dx = -d\cos x$; зато є

$$\frac{^2dy}{d^2x} = -\cos x + C_1, \text{ а}$$

$$\frac{^2dy}{dx} = d\frac{dy}{dx} = -\cos x \cdot dx + C_1 dx$$

$$= -d\sin x + C_1 dx, \text{ тако да}$$

слѣдуе $\frac{dy}{dx} = -\sin x + C_1 x + C_2$, и одтудъ

$$dy = -\sin x \cdot dx + C_1 x dx + C_2 dx$$

$$= d\cos x + C_1 x dx + C_2 dx, \text{ а}$$

$$y = {}^3\int \sin x . d^3x = \cos x + \tfrac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$= \cos x + \mathfrak{C}_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

2.) Пыта се y изъ $^4dy = \frac{d^4x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\frac{^4dy}{d^3x} = d\,\frac{^3dy}{d^3x} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, зато

$\frac{^3dy}{d^3x} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,(sin = x) + C_1$ (§ 86.); одтудъ

$\frac{^3dy}{d^2x} = d\,\frac{^2dy}{d^2x} = arc\,(sin = x)\,.\,dx + C_1 dx$, зато

$\frac{^2dy}{d^2x} = \int arc\,(sin = x)\,dx + C_1 x + C_2$

$= x\,.\,arc\,(sin = x) + \sqrt{1-x^2} + C_1 x + C_2$ (§ 127.); одатле

$\frac{^2dy}{dx} = d\,\frac{dy}{dx} = x dx.arc\,(sin = x) + dx\,.\sqrt{1-x^2} + C_1 x dx + C_2 dx$

зато

$\frac{dy}{dx} = \int x dx\,.\,arc\,(sin = x) + \int dx\,\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

$= \frac{x^2}{2}\,arc\,(sin = x) + \frac{3}{4}\,x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\,arc\,(sin = x)$

$- \frac{1}{2}\,arc\,(sin = \sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

(III. осн. прав. § 85.; найпре $1-x^2 = z^2$, после § 111.); одтудъ

$dy = \frac{1}{2} x^2\,.\,dx\,.\,arc\,(sin = x) + \frac{3}{4}\,x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\,dx\,.\,arc\,(sin = x)$

$- \frac{1}{2}\,dx\,.\,arc\,(sin = \sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{2} C_1 x^2 dx + C_2 x dx + C_3 dx,$

и зато

$$y = {}^4\!\int \frac{d^4x}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2}\int x^2 . dx . arc\,(sin = x) + \tfrac{3}{4}\int x\sqrt{1-x^2}$$

$$- \tfrac{1}{4}\int dx\; arc\,(sin = x) - \tfrac{1}{2}\int dx . arc\,(sin = \sqrt{1-x^2})$$

$$+ \tfrac{1}{6} C_1 x^3 + \tfrac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

$$= \frac{x}{12}(2x^2 - 3) . arc\,(sin = x) + \frac{1}{36}(11x^2 + 4) . \sqrt{1-x^2}$$

$$- \tfrac{1}{2} x\; arc\,(sin = \sqrt{1-x^2}) + \mathfrak{C}_1 x^3 + \mathfrak{C}_2 x^2 + \mathfrak{C}_3 x + \mathfrak{C}_4$$

(III. осн. прав. и § 111.; обр. 18. § 87.; § 127.; $1 - x^2 = z^2$, после § 111.).

§ 143.

Безъ обзира на сталне броєве имамо

$${}^2\!\int \psi(x) d^2x = \int dx \int \psi(x)\, dx\,,$$

или ако у III. основномъ правилу § 85. узмемо $d f(x) = dx$, а $\varphi(x) = \int \psi(x)\, dx$, дакле $f(x) = x$, а $d\varphi(x) = \psi(x) dx$:

$${}^2\!\int \psi(x)\, d^2x = x \int \psi(x)\, dx - \int x . \psi(x)\, dx.$$

Одтудъ слѣдує

$${}^3\!\int \psi(x)\, d^3x = \int dx . {}^2\!\int \psi(x)\, d^2x = \int x dx \int \psi(x)\, dx$$

$$- \int dx \int x \psi(x)\, dx.$$

Поставляюћи пакъ у истомъ III. правилу єданпутъ $df(x) = x dx$, $\varphi(x) = \int \psi(x)\, dx$, а другій путъ $df(x) = dx$, $\varphi(x) = \int x \psi(x)\, dx$, слѣдує

$$\int x dx \int \psi(x)\, dx = \tfrac{1}{2} x^2 . \int \psi(x)\, dx - \tfrac{1}{2} \int x^2 \psi(x)\, dx\,, \quad \text{а}$$

$$\int dx \int x\psi(x)\,dx = x\int x\psi(x)\,dx - \int x^2\psi(x)\,dx,$$

тако да є после съ тима вредностима

$$^3\int \psi(x)\,d^3x = \frac{1}{2!}\,[x^2.\int \psi(x)\,dx - 2x.\int x\psi(x)\,dx + \int x^2.\psi(x)\,dx].$$

Истимъ путемъ добыямо далѣ

$$^4\int \psi(x)\,d^4x = \frac{1}{3!}\,[x^3.\int \psi(x)dx - 3x^2.\int x\psi(x)dx + 3x.\int x^2\psi(x)\,dx - \int x^3\psi(x)\,dx],$$

$$^5\int \psi(x)\,d^5x = \frac{1}{4!}\,[x^4.\int \psi(x)dx - 4x^3.\int x\psi(x)dx + 6x^2.\int x^2\psi(x)\,dx - 4x.\int x^3\psi(x)\,dx + \int x^4\psi(x)\,dx],$$

и т. д. докъ найпосле уобште

$$^n\int \psi(x)\,d^nx = \frac{1}{(n-1)!}\,[x^{n-1}.\int \psi(x)\,dx - \binom{n-1}{1}x^{n-2}.\int x\psi(x)\,dx + \binom{n-1}{2}x^{n-3}.\int x^2\psi(x)\,dx - \ldots \pm \int x^{n-1}\psi(x)\,dx],$$

или ако іощъ сви n сталны броєва, кои при постепеномъ интеграленю єданъ по єданъ овамо улазе, и одъ кои є свакій съ другимъ некимъ степеномъ одъ x снабдевенъ, неизоставимо,

$$^n\int \psi(x)\,d^nx = \frac{1}{(n-1)!}\,[x^{n-1}.\int \psi(x)\,dx - \binom{n-1}{1}x^{n-2}.\int x\psi(x)\,dx + \ldots \pm \int x^{n-1}\psi(x)\,dx] + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

образацъ, помоћу кога можемо свакій вышій интегралъ свести на саме просте интеграле. Тако н. п. имали бы по истомъ образцу

$$^3\int\frac{d^3x}{x^3}=\frac{1}{2!}\left[x^2\cdot\int\frac{dx}{x^3}-2x\cdot\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x}\right]+C_1x^2+C_2x+C_3$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2\cdot\frac{1}{-2x^2}-2x\cdot\frac{1}{-x}+lx\right]+C_1x^2+C_2x+C_3$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}lx+C_1x^2+C_2x+C_3$$

$$=\frac{1}{2}lx+C_1x^2+C_2x+\left(C=C_3+\frac{3}{4}\right).$$

§ 144.

Садъ смо у станю определити границе међу коима лежи сбиръ пренебрегнуты чланова маклореновогъ и телеровогъ образца, кое є у анализи и при нѣномъ употребляваню одъ врло велике важности.

Узимаюћи одъ обштегъ маклореновогъ образца (§ 32.) само n првы чланова, и означуюћи сбиръ осталы съ X, слѣдує изъ истога образца

$$X=f(x)-f(\underset{a}{x})-f_1(\underset{a}{x})\cdot(x-\alpha)-f_2(\underset{a}{x})\cdot\frac{(x-\alpha)^2}{2!}-f_3(\underset{a}{x})\frac{(x-\alpha)^3}{3!}$$

$$-\cdots-f_{n-1}(\underset{a}{x})\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!},$$

изразъ, кои очевидно за $x=\alpha$ постає $=0$, због чега можемо по §у 133. сбиръ X сматрати као интегралъ кои започинѣ съ $x=\alpha$.

Диференціалећи истый изразъ n пута застопце, налазимо

$$^n dX=f_n(x)\,d^nx;$$

интегралећи пакъ ово по предходећемъ §у међу границама α и x, слѣдує

$$X = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int_a^x f_n(x)\,dx - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \int_a^x x f_n(x)\,dx$$

$$+ \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} \cdot \int_a^x \frac{x^2}{2!} f_n(x)\,dx - \ldots$$

$$\pm \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} \cdot \int_a^x \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \cdot f_n(x)\,dx \mp \ldots \pm \int_a^x \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f_n(x)\,dx .$$

Но пошто є при опредељеномъ међу известнимъ границала интегралу сасвимъ свеєдно, кои є пременљивый брой пре тога стаяо, то можемо у интегралима сбира X узети место x ма какавъ другій пременљивый брой, н. п. z. Поступаюћи тако добыямо

$$X = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int_a^x f_n(z)\,dz - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \int_a^x z f_n(z)\,dz$$

$$+ \frac{x^{n-3}}{(n-2)!} \cdot \int_a^x \frac{z^2}{2!} \cdot f_n(z)\,dz - \ldots$$

$$\pm \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} \cdot \int_a^x \frac{z^{r-1}}{(r-1)!} \cdot f_n(z)\,dz \mp \ldots \pm \int_a^x \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f_n(z)\,dz .$$

Али є по прећашнћмъ §у

$$^2\int_a^x f_n(z)\,d^2z = x\int_a^x f_n(z)\,dz - \int_a^x z f_n(z)\,dz$$

$$= \int_a^x x \cdot f_n(z)\,dz - \int_a^x z f_n(z)\,dz = \int_a^x (x-z) \cdot f_n(z)\,dz,$$

$$^3\int_a^x f_n(z)\,d^3z = \frac{x^2}{2!} \cdot \int_a^x f_n(z)\,dz - x\int_a^x z f_n(z)\,dz + \int_a^x \frac{z^2}{2!} \cdot f_n(z)\,dz$$

$$= \int_a^x \frac{x^2}{2!} \cdot f_n(z)\,dz - \int_a^x xz \cdot f_n(z)\,dz + \int_a^x \frac{z^2}{2!} \cdot f_n(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{2!} \cdot \int_a^x (x^2 - 2xz + z^2) \cdot f_n(z)dz. = \frac{1}{2!}\int_a^x (x-z)^2 \cdot f_n(z)dz,$$

$$^4\int_a^x f_n(z)d^4z = \frac{x^3}{3!}\cdot\int_a^x f_n(z)dz - \frac{x^2}{2!}\cdot\int_a^x z f_n(z)dz + x\int_a^x \frac{z^2}{2!}\cdot f_n(z)\,dz$$

$$-\int_a^x \frac{z^3}{3!}\cdot f_n(z)\,dz$$

$$= \int_a^x \frac{x^2}{3!}\cdot f_n(z)\,dz - \int_a^x \frac{x^2 z}{2!}\cdot f_n(z)\,dz + \int_a^x \frac{xz^2}{2!} f_n(z)\,dz$$

$$-\int_a^x \frac{z^3}{3!}\cdot f_n(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{3!}\cdot\int_a^x (x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3)\cdot f_n(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{3!}\cdot\int_a^x (x-z)^3\cdot f_n(z)\,dz,$$

и т. д., те зато найпосле

$$X = {}^n\int_a^x f_n(z)\,d^nz = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\int_a^x (x-z)^{n-1}\cdot f_n(z)\,dz.$$

Примѣћаваюћи сада іошъ, да є $(x-z)^{n-1}$ за све вредности броя z одъ α па до x єдногъ истогъ знака, т. є. при положнимъ вредностима одъ z свагда положно, а при одречнимъ вредностима истога броя свагда одречно, и да у последнѣмъ случаю можемо тражити $-X$, тако да є тадъ $(x-z)^{n-1}$ опетъ свагда положно: увиђамо да су тражене границе сбира X при обштемъ маклореновомъ образцу по § 138.

$$\frac{f_n(z)}{g}\cdot\int_a^x (x-z)^{n-1}\cdot dz \quad \text{и} \quad \frac{f_n(z)}{k}\cdot\int_a^x (x-z)^{n-1}\cdot dz,$$

гди $f_n(z)$ и $f_n(z)$ представляю односно найвећу и най-
g k

маню вредность функціе $f_n(z)$, коє она прима одъ $z = \alpha$

до $z = x$. Пошто є пакъ найпосле $\int (x-z)^{n-1} . dz = -\frac{(x-z)^n}{n} + C$, дакле $\int_a^x (x-z)^{n-1} . dz = \frac{(x-\alpha)^n}{n}$, то су вопросне границе сбира X,

$$f_n(x)_g \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \quad \text{и} \quad f_n(x)_k \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!} .$$

По тому, ако $f_n(x)_{\mu x}$ представля међу $f_n(x)_k$ и $f_n(x)_k$ лежећу вредность функціе $f_n(x)$, коя одговара сбиру X пренебрегнуты чланова, треба општій маклореновъ образацъ писати овако:

$$f(x) = f(x)_a + f_1(x)_a \cdot (x-\alpha) + f_2(x)_a \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + f_3(x)_a \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!}$$

$$+ \ldots + f_{n-1}(x)_a \cdot \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(x)_{\mu x} \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!} ,$$

при чему μ, каошто се изъ предходећегъ рада увиђа, представля некій чистъ разломакъ.

При простомъ є маклореновомъ образцу $\alpha = 0$, и зато истый образацъ сада, са сбиромъ X пренебрегнуты чланова одъ $(n+1)$. на далѣ, овакавъ:

$$f(x) = f(x)_0 + f_1(x)_0 \cdot x + f_2(x)_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + f_3(x)_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots .$$

$$+ f_{n-1}(x)_0 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(x)_{\mu x} \cdot \frac{x^n}{n!} .$$

Изъ пређашньи граница општегъ маклореновогъ образца слѣдую границе сбира X за телеровъ образацъ, ако место x узмемо найпре $\alpha + h$, али после опетъ изменемо α съ x. Тако поступаюћи показуе се телеровъ образацъ са сбиромъ X чланова одъ $(n+1)$. на далѣ овако:

$$f(x+h) - f(x) = f_1(x)\,h + f_2(x)\frac{h^2}{2!} + f_3(x)\frac{h^3}{3!} + \ldots$$

$$+ f_{n-1}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(x+\mu h)\cdot\frac{h^n}{n!},$$

гди μ важи што и пре.

§ 145.

Ако є $\int f(x) = \varphi(x)$, онда постає телеровъ образацъ са допуномъ X вида

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx = f(x)\,h + f_1(x)\frac{h^2}{2!} + f_2(x)\frac{h^3}{3!} + \ldots.$$

$$+ f_{n-2}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + f_{n-1}(x+\mu h)\cdot\frac{h^n}{n!}.$$

Узимаюћи овде a место x, а $b-a$ место h, слѣдує

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(a)\cdot\frac{b-a}{1} + f_1(a)\cdot\frac{(b-a)^2}{2!} + f_2(a)\cdot\frac{(b-a)^3}{3!}$$

$$+ \ldots + f_{n-2}(a)\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + f_{n-1}(a+\mu(b-a))\cdot\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Стављаюћи пакъ у прећашнѣмъ образцу найпре $-h$ место h, а после b место x и $b-a$ место h, добыямо іошъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(b)\cdot\frac{b-a}{1} - f_1(b)\cdot\frac{(b-a)^2}{2!} + f_2(b)\cdot\frac{(b-a)^3}{3!}$$

$$- \ldots \pm f_{n-2}(b)\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \mp f_{n-1}(b-\mu(b-a))\cdot\frac{(b-a)^n}{n!},$$

при коя два образца вреди μ што и дояко, тако да сачинитель одъ $\frac{(b-a)^n}{n!}$ лежи свагда измећу найманѣ и највеће вредности одъ $f_{n-1}(x)$, коє ова функція прима, кадъ место x узмемо наставно све вредности одъ a до b.

Б. Интеграленѣ функція више пременльивы броєва.

а) Интегрални почастны диференціала.

§ 146.

Ако є v нека функція два међу собомъ независна пременльива броя x и y, и нѣнъ є почастный другій диференціалный количникъ $\frac{\partial^2 v}{dx \, . \, dy} = z$ познатъ, онда можемо исту функцію v изъ овогъ количника, поредъ свега тога што се у нѣму налазе два пременльива броя, ипакъ по онимъ истимъ, дояко показанимъ правилама за интеграленѣ функція само єдногъ пременльивогъ броя изнаћи; єръ се тай количникъ, каошто знамо, добыя, сматраюћи при диференціаленю вопросне функціє найпре само єданъ, па онда и онай другій пременльивый брой као такова, због чега обратно при интеграленю сасвимъ наравно такоћеръ найпре само єданъ, па онда и онай другій одъ тій броєва као пременльива узети валя, а то очевидно нинашта друго неизлазн, већъ на повторено интеграленѣ функціє само єдногъ пременльивогъ броя.

У таковомъ є случаю съ другимъ речма

$$\frac{\partial^2 v}{dy} = d\frac{dv}{dy} = z dx, \quad \text{и зато}$$

$$\frac{dv}{dy} = \int z dx + Y,$$

при чему Y представля неку іошъ непознату функцію само одъ y. Одтудъ пакъ слѣдує

$$dv = dy \, . \int z dx + Y dy,$$

и зато вопросна функція

$$v = \int dy \int z dx + \int Y dy + X,$$

гди X стои место неке іошъ непознате функціє само одъ x.

Тако є н. п. у случаю ако є $\frac{^2dv}{dx\,.\,dy}=\frac{2}{\sqrt{x^2-y^2}}$,

$$\frac{^2dv}{dy}=d\frac{dv}{dy}=\frac{2dx}{\sqrt{x^2-y^2}}=2\frac{dx}{x}\cdot\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=2\frac{dx}{x}\cdot\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{1.3}{2^2.2!}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^4+\frac{1.3.5}{2^3.3!}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^6+\ldots\right],$$ дакле

$$\frac{dv}{dy}=2\left[\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}y^2\cdot\int\frac{dx}{x^3}+\frac{1.3}{2^2.2!}y^4\cdot\int\frac{dx}{x^5}+\frac{1.3.5}{2^3.3!}y^6\cdot\int\frac{dx}{x^7}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots\right]$$

$$=2lx-\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{y^2}{x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1.3}{2^2.2!}\right)\cdot\frac{y^4}{x^4}-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3.5}{2^3.3!}\right)\frac{y^6}{x^6}$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5.7}{2^4.4!}\right)\frac{y^8}{x^8}-\ldots\ldots+Y,$$ и одтудъ

$$dv=2lx\,.\,dy-\frac{1}{2x^2}\cdot y^2dy-\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2^2.2!\,x^4}\cdot y^4dy-\frac{1}{3}\cdot\frac{1.3.5}{2^3.3!x^6}y^6dy$$

$$-\ldots\ldots+Ydy,$$ а зато опетъ

$$v=2ylx-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\frac{y^3}{x^2}-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2^2.2!}\right)\frac{y^5}{x^4}-\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1.3.5}{2^3.3!}\right)\frac{y^7}{x^6}$$

$$-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2^4.4!}\right)\frac{y^9}{x^8}-\ldots+\int Ydy+X.$$

Како треба поступати ако є датый почастный дифе-ренціалный количникъ вышега степена, н. п. $\frac{^3dv}{dx.dy.dz}=t$, или $\frac{^4dv}{dw.dx.dy.dz}=u$ и т. д., увиђа се сада безъ сумнѣ по себи, и зато ћемо само іошъ да приметимо како се израз $\int dy\int zdx$ зове **двострукій** интегралъ, израз $\int dz\int dy\int tdx$ **тростукій** интегралъ, и подобно далѣ.

б) Интеграли подпуны просты диференціала или диференціалны количника.

§ 147.

Место изъ каквогъ почастногъ диференціала или диференціалногъ количника функціе више променльивы броєва, може се иста функція тражити изъ некогъ нѣногъ подпуногъ диференціала или диференціалногъ количника, и тай є посао, каошто ћемо одма видити већъ тежій одъ пређашнѣга.

Узмимо найпре да се тражи функція два променльива броя изъ датогъ нѣногъ подпуногъ другогъ диференціала.

Тай є по § 37., ако се тиче функціе $v = f(x, y)$,

$$dv = f_1(x,y)_x \cdot dx + f_1(x,y)_y \cdot dy, \quad \text{или простіе}$$

$$= Mdx + Ndy \quad \ldots, \ldots (1.,$$

гди, каошто се лако увиђа а и већъ знамо одъ пре, M и N представляю опетъ неке функціе одъ x и y, тако да є свагда (§ 46.)

$$\frac{dM_y}{dy} = \frac{dN_x}{dx} \quad \ldots \ldots (2.$$

Тражи ли се дакле функція v изъ горнѣгъ израза подъ 1., то имамо обзиромъ на то, да є $M = f_1(x,y)_x = \frac{dv_x}{dx}$,

$$v = \int Mdx + Y \quad \ldots \ldots (3.,$$

гди Y представля неку функцію само броя y.

Да бы пакъ ту функцію одкрили, то валя приметити, да є $\frac{dv_y}{dy} = N$, због чега, ако пређашню єдначину подъ 3. по y диференціалимо и притомъ ставимо ради краткоће

$$\int M dx = z \quad \ldots\ldots \text{(4., следує}$$

$$\frac{dv_y}{dy} = N = \frac{dz_y}{dy} + \frac{dY}{dy}, \text{ и одтудъ}$$

$$dY = N dy - \left(\frac{dz_y}{dy}\right) dy, \text{ тако да є после}$$

$$Y = \int N dy - \int \left(\frac{dz_y}{dy}\right) dy$$

и зато по горньой єдначини подъ 3. функція

$$v = z + \int \left(N - \frac{dz_y}{dy}\right) dy \quad \ldots\ldots \text{(I.,}$$

чему за подпуну општость само іошъ валя придати сталный брой C.

Овай изразъ быт'ће безъ сумнѣ подпуно определѣнъ, ако разлика $N - \left(\frac{dz_y}{dy}\right)$ несадржи више брой x, но само іошъ y, или є сталанъ брой. Да пакъ, у случаю ако є датый диференціалъ функціє v као подпуный исправанъ, броя x у истой разлици никако више неможе быти, ево увереня.

Ставимо $N - \frac{dz_y}{dy} = P$. Быт'ће ако по x диференціалимо

$$\frac{dP_x}{dx} = \frac{dN_x}{dx} - \frac{{}^2dz}{dy.dx}.$$

Но по § 45. є

$$\frac{{}^2dz}{dy.dx} = \frac{{}^2dz}{dx.dy} = \frac{d\left(\frac{dz_x}{dx}\right)}{dy},$$

и зато ако место $\frac{dz_x}{dx}$ узмемо нѣгову изъ єдначине подъ 4. слѣдующу вредность M,

$$\frac{^2dz}{dy\,.\,dx} = \frac{dM_y}{dy},$$

а због тога обзиромъ на єдначину подъ 2.

$$\frac{dP_x}{dx} = \frac{dN_x}{dx} - \frac{dM_y}{dy} = 0,$$

кое є знакъ, да вопросна разлика $P = N - \frac{dz_y}{dy}$ несадржи брой x. Она є дакле, па зато и Y или какавъ безусловно сталный брой, или пакъ само іошъ нека функція одъ y.

Сасвимъ истимъ путемъ налазимо, полазећи горе одъ N место одъ M,

$$v = w + \int\left[M - \frac{dw_x}{dx}\right]\cdot dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II.,$$

при чему є $w = \int N dy + X$, и овде опетъ X или некій безусловно сталный брой, или пакъ нека функція само одъ x.

§ 148.

Примери. 1.) $dv = \frac{dx + dy}{x + y}$.

Ту є $M = N = \frac{1}{x+y}$, $z = \int M\,dx = \int \frac{dx}{x+y} = l\,(x+y)$,

$\frac{dz_y}{dy} = \frac{dy}{x+y}$, зато по образцу I. тражена функція

$$v = l\,(x+y) + \int\left(\frac{dy}{x+y} - \frac{dy}{x+y}\right)dy + C.$$

$$= l\,(x+y) + C.$$

2.) $dv = y^x . ly . dx + xy^{x-1} . dy.$

При томъ є $M = y^x . ly$, $N = xy^{x-1}$, $z = \int M dx = \int y^x . ly . dx = y^x$, $dz_y = xy^{x-1} . dy$, зато по поменутомъ образцу тражена функція

$$v = y^x + \int (xy^{x-1} - xy^{x-1})\, dy + C$$

$$= y^x + C \quad \text{(види § 46.).}$$

3.) $dv = \cos x . \cos y . dx - \sin x . \sin y . dy.$

Ту є $M = \cos x \cos y$, $N = -\sin x \sin y$, $z = \int M dx = \int \cos x . \cos y . dx = \cos y . \int \cos x . dx = \cos y . \sin y$, $dz_y = -\sin y \sin x . dy$, дакле

$$v = \sin x \cos y + \int (-\sin x \sin y + \sin x \sin y) + C$$

$$= \sin x \cos y + C \quad \text{(види § 39.)}$$

§ 149.

Ако имамо изнаћи функцію $v = f(x, y, z)$ три променљива броя x y и z изъ датогъ нѣногъ подпуногъ диференціала

$$dv = Mdx + Ndy + Odz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1.,}$$

при комъ по § 47. $M = f_1(x, y, z)_x$, $N = f_1(x, y, z)_y$ и $O = f_1(x, y, z)_z$ представляю такове функціе иста три броя x, y, и z, да є свагда

$$\frac{dM_y}{dy} = \frac{dN_x}{dx}, \quad \frac{dM_z}{dz} = \frac{dO_x}{dx}, \quad \frac{dN_z}{dz} = \frac{dO_y}{dy} \quad \ldots\ldots \text{(2.,}$$

онда поступамо овако:

Сматраюћи у изразу подъ 1. єданъ одъ променљивы броєва, н. п. z као стална, и поставляюћи после ради краткоће

$$Mdx + Ndy = du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.,}$$

добыямо интеграленѣмъ истога израза подъ 1.

$$v = u + Z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4.,$$

гди Z представля неку функцію само іошъ одъ z.

Узимаюћій далѣ подпуный диференціалъ овогъ последнѣгъ израза, слѣдує

$$dv = Mdx + Ndy + du_x + du_y + du_z + dZ \quad \ldots \quad (5.,$$

и одтудъ, сматраюћи све по два и два пременљива броя као сталне,

$$Mdx = du_x,\ Ndy = du_y,\ Odz = du_z + dZ, \text{ или}$$

$$M = \frac{du_x}{dx},\ N = \frac{du_y}{dy},\ O = \frac{du_z}{dz} + \frac{dZ}{dz} \quad \ldots\ldots \quad (6.,$$

Последњій одъ ова три израза дає

$$dZ = \left(O - \frac{du_z}{dz}\right) dz, \text{ а ово опетъ}$$

$$Z = \int \left(O - \frac{du_z}{dz}\right) dz,$$

одкуда увиђамо, да ћемо ову функцію Z лако моћи изнаћи по предходећимъ §§-ма, ако разлика $O - \frac{du_z}{dz}$ несадржи никакавъ другій пременљивый брой, осимъ z. Да ово пакъ, у случаю да є датый диференціалъ функціє v као подпуный исправанъ, доиста постои, ево увереня:

Нека є ради краткоће $O - \frac{du_z}{dz} = P$. Быт'ће

$$\frac{dP_x}{dx} = \frac{dO_x}{dx} - \frac{{}^2du}{dz \cdot dx} = \frac{dO_x}{dx} - \frac{d\left(\frac{du_x}{dz}\right)}{dz},$$

$$\frac{dP_y}{dy} = \frac{dO_y}{dy} - \frac{{}^2du}{dz \cdot dy} = \frac{dO_y}{dy} - \frac{d\left(\frac{du_y}{dz}\right)}{dz},$$

или ако место последњи чланова у оба израза узмемо њиове вредности по изразу подъ 6.,

$$\frac{dP_x}{dx} = \frac{dO_x}{dx} - \frac{dM_z}{dz}, \text{ а } \frac{dP_y}{dy} = \frac{dO_y}{dy} - \frac{dN_z}{dz},$$

т. е. обзиромъ на изразе подъ 2.)

$$\frac{dP_x}{dx} = 0 \text{ и } \frac{dP_y}{dy} = 0$$ за знакъ: да є P по x и y стално, и дакле као таково или какавъ безусловно сталный брой, или пакъ само іошъ нека функція одъ z.

На основу тога имамо садъ коначно по єдначини подъ 4.)

$$v = u + \int \left(O - \frac{du_z}{dz}\right) bz,$$

за кое валя найпре изнаћи u по предходећимъ §§-ма изъ израза подъ 3.

§ 150.

Примеръ. Датъ є $dv = sin\,(y\,lz).dx + xlz\,.\,cos\,(y\,lz).dy + xy\,.\,cos\,(y\,lz)\,.\,dz$.

Ту є $M = sin\,(y\,lz)$, $N = x\,lz\,.\,cos\,(y\,lz)$, $O = xy\,.\,cos\,(y\,lz)$, дакле

$$du = sin\,(y\,lz)\,dx + x\,lz\,.\,cos\,(y\,lz)\,dy,$$

$$u = \int [sin\,(y\,lz)\,.\,dx + x\,lz\,.\,cos\,(y\,lz)\,dy]$$

$$= w + \int \left[x\,lz.cos\,(y\,lz) - \frac{dw_y}{dy}\right] dy, \text{ или збогъ}$$

$$w = \int sin\,(y\,lz)\,dx = sin\,(y\,lz)\,x, \text{ а } \frac{dw_y}{dy} = x\,lz\,.\,cos\,(y\,lz):$$

$$u = x\,sin\,(y\,lz) + \int [x\,lz.cos\,(y\,lz) - x\,lz.cos\,(ylz)]\,dy$$

$$= x\,sin\,(y\,lz)\,.$$

Слѣдователно $\frac{du_z}{dz} = \frac{xy}{z} \cdot cos\,(y\,lz)$, и зато по послѣднѣмъ изразу прећашнѣга §-а

$$v = x\,.\,sin\,(y\,lz) + \int\left[\frac{xy}{z} \cdot cos\,(y\,lz) - \frac{xy}{z} \cdot cos\,(y\,lz)\right] dz$$

$$= x\,.\,cos\,(y\,lz) + C\,.$$

(Види § 39. примеръ 5.).

Примєтба. Пошто се овай начинъ интеграленя подпуны диференціала само дотле може употребити, докъ є датый диференціалъ као подпуный исправанъ, то дакле пре свега нѣгову исправность испытати валя.

в.) Интегрални єдностепены диференціалны функція првога реда.

§ 151.

Ако є $dv = Mdx + Ndy + Odz + \ldots\ldots$, и притомъ M, N, O и т. д. представляю єдностепене функціе произвольно коликога, али све єдногъ истогъ степена, н. п. n., онда є v єдностепена функція $(n+1)$ степена, и по показаномъ у § 40. свойству таковы функція

$$(n+1)\,v = Mx + Ny + Oz + \ldots\ldots,$$

одкуда слѣдує

$$v = \int(Mdx + Ndy + Odz + \ldots\ldots)$$

$$= \frac{Mx + Ny + Oz + \ldots\ldots}{n+1} + C\,.$$

Интеграленѣ є дакле таковы диференціалны єдностепены функція првога реда врло просто, каошто ће то потврдити и слѣдуюћи у

§ 152.

Примери.

1.) Имамо $dv = (4x + y - 2\frac{z^4}{x^3})\,dx + (x - 3z - \frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{z})\,dy$

$$- (3y - 4\frac{z^3}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{z^2})\,dz\,.$$

Ту су диференціални сачинитељи једностепене функције првога степена, и слѣдује по горњему

$$v = \frac{1}{2}\left[\left(4x + y - 2\frac{z^4}{x^3}\right)x + \left(x - 3z - \frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{z}\right)y - \left(3y - 4\frac{z^3}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{z^2}\right)z\right]$$

$$= 2x^2 + xy + 2\frac{z^4}{x^2} - 3yz - \frac{y^3}{z} + C.$$

(Види § 41.)

2.) $dv = (3x^2 + 2ay^2)\,dx + (4axy + 3by^2)\,dy\,.$

Ту є $n = 2$, т. є. диференціални су количници једностепене функције другогъ степена, и зато по горњему

$$v = \frac{1}{3}\left[(3x^2 + 2ay^2)\,x + (4axy + 3by^2)\,y\right]$$

$$= x^3 + 2axy + by^3 + C\,.$$

3.) $dv = (2x - y\cos\frac{x}{y} + 2y)\,dx + (2x - 2y.\sin\frac{x}{y} + x\cos\frac{x}{y})\,dy\,.$

Ту є $n = 1$, зато по горњему

$$v = \frac{1}{2}\left[(2x - y\cos\frac{x}{y} + 2y)\,x + (2x - 2y\sin\frac{x}{y} + x\cos\frac{x}{y})\,y\right]$$

$$= x^2 - 2xy - y^2\,.\sin\frac{x}{y} + C\,.$$

(Види § 41.)

§ 153.

За овако интеграленѣ єдностепены функція имамо іошъ приметити

1.) Показаный, изъ особиты свойства таковы функція подаюћи се начинъ служи само дотле, докъ є датый диференціалъ, као подпуный, исправанъ, збогъ чега испытиванѣ нѣгове исправности свему предходити мора;

2.) Ако є $n = -1$, онда истый начинъ неможемо употребити, єръ се по нѣму наилази на єдначину вида $0 = 0$, за знакъ, да траженый интегралъ ніє алгебрайскій. У таковомъ дакле случаю неостає ништа друго, но тражити вопросный интегралъ на обичный начинъ;

3.) Показаный начинъ найпосле важи на основу § 41. іошъ и за такове єдностепене функціє, у коима се налазе и трансцендентни чланови, али само ако су ови одъ нулнога степена, као у последнѣмъ примеру, кои ову приметбу подпуно потврђує.

г.) Интеграленѣ диференціалны єдначина'.

§ 154.

Место диференціалногъ каквогъ количника неке функціє, датогъ као дояко у виду одкривене функціє пременльивы, међу собомъ независны броєва, добыямо често само неку єдначину тіи броєва и ньиовы диференціалны количника, изъ коє основну єдначину или функцію изнаћи треба.

Такова дата єдначина зове се **диференціална єдначина**, и као такова опетъ одъ 1., 2., ... уобште n реда, пошто у ньой налазећи се найвышій диференціалный количникъ буде 1., 2., ... уобште n.

У слѣдуюћимъ §§-ма показат'ћемо само интеграленѣ диференціалны єдначина' првога реда одъ два пременльива броя.

1.) Интеграленѣ диференціалны єдначина' 1. реда, и по $\frac{dy}{dx}$ одъ 1. степена.

§ 155.

Диференціална єдначина првога реда одъ два променльива броя по $\frac{dy}{dx}$ одъ првогъ степена обштега є вида.

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0,$$

и може се свагда свести на видъ

$$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

гди P и Q представляю уобште неке функціе одъ x и y, чега ради узиматѣемо при далѣмъ сматраню дату диференціалну єдначину свагда у томъ већъ сведеномъ виду.

Преображаванѣ єдначине $f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ у сведену $Pdx + Qdy = 0$ увиђа се свагда врло лако по себи, због чега није потребно поставити за то нарочна правила. Тако н. п. ако є дата диференціална єдначина

$$(y^2 - x) + (x^2 - y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

нетреба ништа друго радити, осимъ помложити є са dx, пакъ прелази у сведену

$$(y^2 - x)\,dx + (x^2 - y)\,dy = 0.$$

При томе преображаваню могуће є, да се добыю такове функціе P и Q, да є $Pdx + Qdy$ подпуный диференціалъ неке функціе $F(x, y)$, коє ће се, каошто знамо, по томе познати, што ће быти $\frac{dP_y}{dy} = \frac{dQ_x}{dx}$, т. є. диферен-

ціалный количникъ функціе P по y раванъ диференціалномъ количнику функціе Q по x. У таковомъ случаю налазимо помоћу доякошньи §§-а лако ту $F(x, y) = C$, т. е. равну некомъ сталномъ брою.

Чешће пакъ догађа се, да лева часть сведене єдначине, као у горњемъ примеру, није подпуный диференціалъ. У таковимъ случаєвима кушамо єднимъ одъ слѣдующи начина', неможе ли се сведена єдначина далѣ дотерати тако, да є после можемо интегралити у виду крайне функціе.

α.) *Одлучаванѣ пременљивы броєва.*

§ 156.

Цѣль овога начина састои се у томе, да одъ єдначине $Fdx + Qdy = 0$ направимо другу $Xdx + Ydy = 0$, гди X и Y нису више као пре P и Q функціе оба пременљива броя, но X само функція одъ x, а Y само функція одъ y; тако дакле, да є затимъ савъ посао сведенъ на интеграленѣ функція єдногъ пременљивогъ броя, по коме бы просто слѣдовала вопросна функція

$$v = \int Xdx + \int Ydy = C.$$

Како у име тога валя поступати, неможе се у обште рећи, но није ни потребно, єръ гдигодъ є таково одлучаванѣ могуће, увиђа се начинъ коимъ га постизавамо, лако по себи.

Тако н. п. ако бы была сведена єдначина вида

$$XY\,dx + X_1\,Y_1\,dy = 0,$$

гди єдно или друго или оба X, или єдно или друго или оба Y могу быти и деловне функціе, но прве само по x, а друге само по y, — треба само разделити са YX_1, па ћемо имати єдначину.

$$\frac{X}{X_1}dx + \frac{Y_1}{Y}dy = 0$$

са одлученимъ променльивимъ броєвима.

Нека є сведена єдначина $ydx + xdy = 0$. Слѣдує деобомъ чрезъ xy

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0,$$ и одтудъ

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dy}{y} = lx + ly = lxy = c,$$

т. є. тражена основна функція

$$xy = e^c = C.$$

Подобно добыямо одъ сведене єдначине

$$x^2y^2.dx + (y+1)\sqrt{x}.dy = 0$$

деобомъ чрезъ $y^2.\sqrt{x}$ єдначину съ одлученимъ променльивимъ броєвима

$$x^{\frac{3}{2}}.dx + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0,$$

и одтудъ интеграленѣмъ основну функцію

$$\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + ly - \frac{1}{y} = C.$$

β.) *Изтраживанѣ интегралећег чинителя.*

§ 157.

Ако дату диференціалну єдначину у сведеномъ виду немогнемо интегралити по предходећемъ начину, онда

може быти да ћемо є моћи, ако ю найпре помложимо са некимъ чинителѣмъ z, кои є уобште нека функція одъ x и y. Тай дакле чинитель z мора быти тога свойства, да съ ньимъ постане $Pz \,.\, dx + Qz \,.\, dy = 0$ подпуный диференціалъ, или што є свеєдно, да буде

$$\frac{d\,(Pz)_y}{dy} = \frac{d\,(Qz)_x}{dx}.$$

Да пакъ такавъ чипитель доиста постои, уверавамо се лако на слѣдуюћій начинъ.

§ 158.

Ако постои доиста нека функція $f(x, y) = C$ као интегралъ єдначине $Pdx + Qdy = 0$, онда због

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$$

$$\left[\frac{d\,f(x\,,\,y)_x}{dx}\right] dx + \left[\frac{d\,f(x\,,\,y)_y}{dy}\right] dy = 0\,,$$

а одтудъ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left[\frac{d\,f(x\,,\,y)_x}{dx}\right]}{\left[\frac{d\,f(x\,,\,y)_y}{dy}\right]}\,,\ -$$

мора быти непремено

$$\frac{\left[\frac{d\,f(x\,,\,y)_x}{dx}\right]}{\left[\frac{d\,f(x\,,\,y)_y}{dy}\right]} = \frac{P}{Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha.,$$

а то, осимъ ако є $\frac{d\,f(x\,,\,y)_x}{dx} = P$, а $\frac{d\,f(x\,,\,y)_y}{dy} = Q$, т. є. осимъ ако є єдначина $Pdx + Qdy = 0$ подпуный диференціалъ, може быти само тако, да є $\varphi(x, y)\,P = \frac{d\,f(x\,,\,y)_x}{dx}$

а $\varphi(x,y)\,Q = \frac{d\,f(x,y)_y}{dy}$, и по томе свака диференціална єдначина првога реда одъ два пременљива броя, коя ніе подпуный диференціалъ какве єдначине $f(x,y) = C$, има донста свагда єднога чинителя $\varphi(x,y)$, кои ю таковимъ чини. Тай чинитель зове се **интегралећій чинитель** диференціалне функціе, и може быти уобште нека функція исты пременљивы броєва x и y.

Напослѣдку лако се іошъ увиђа, да свака неподпуна диференціална єдначина нема само єдногъ интегралећегъ чинителя, но безбройно млого ньи. Єръ, ако є z єданъ такавъ чинитель неподпуне єдначине $Pdx + Qdy = 0$, онда є $Pz\,.\,dx + Qz\,.\,dy = d\,f(x,y)$ подпуный диференціалъ, па съ тога и єдначина $Pzv\,.\,dx + Qzv\,.\,dy = v\,.\,df(x,y)$, кою добыямо ако ону помложимо са ма каквомъ функціомъ $v = \psi[f(x,y)]$, подпуный диференціалъ зато, што є $v\,.\,d\,f(x,y)$ очевидно подпуный диференціалъ. Свакій дакле производъ одъ интегралећегъ чинителя z са ма каквомъ функціомъ $\psi\,[f(x,y)]$ преводи дату диференціалну єдначину у подпуну; пошто пакъ функція одъ $f(x,y)$ може быти безбройно млого, то дакле свака диференціална єдначина има доиста безбройно млого интегралећи чинителя.

§ 159.

Ако є z интегралећій чинитель єдначинѣ $Pdx + Qdy = 0$. онда, каошто рекосмо горе у § 157., мора быти

$$\frac{d\,(Pz)_y}{dy} = \frac{d\,(Qz)_x}{dx},$$

или, ако ове изразе развіемо,

$$P\,.\,\frac{dz_y}{dy} + z\,.\,\frac{dP_y}{dy} = Q\,.\,\frac{dz_x}{dx} + z\,.\,\frac{dQ_x}{dx},$$ и одтудъ

$$z\,.\left(\frac{dP_y}{dy} - \frac{dQ_x}{dx}\right) = Q\,\frac{dz_x}{dx} - P\,.\,\frac{dz_y}{dy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(m.}$$

Изъ ове єдначине добыли бы z, кадъ бы уобште были у станю разрешити ю. Но тай є посао, зато што z зависи осимъ одъ два пременљива броя x и y іошъ и одъ своя два іошъ непозната диференціална количника по x и y, обично тежи одъ интеграленя саме дате диференціалне єдначине, због чега таквога чинителя z понайвише само срећнимъ покушаима изнаћи можемо. Дояко поне у станю смо изнаћи га известнимъ путемъ само у два особита случая, т. є. 1. ако истый чинитель z треба да буде функція само єдногъ одъ она два пременљива броя, или 2. ако є дата диференціална єдначина єдностепена буди кога реда. Како пакъ притомъ поступамо, показат'ће слѣдующи §§-и.

§ 160.

Урецимо да єдначина $Pdx + Qdy = 0$ постае интегральива, ако є помложимо са некомъ функціомъ z само одъ x.

У томъ є случаю очевидно $\frac{dz_y}{dy} = 0$, и єдначина m.) прећашнѣга §-а, изъ коє валя тражити z, претвара се у простію ову,

$$z \cdot \left(\frac{dP_y}{dy} - \frac{dQ_x}{dx}\right) = Q \cdot \frac{dz_x}{dx},$$

одъ коє после слѣдує

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{Q} \cdot \left(\frac{dP_y}{dy} - \frac{dQ_x}{dx}\right) dx.$$

Пошто є лева часть ове єдначине интегральива, то мора быти а десна, што при предпостави, да є z функція само одъ x, и што дакле $\frac{dP_y}{dy} - \frac{dQ_x}{dx}$ несме садржати y, доиста и постои.

Ставимо $\frac{1}{Q}\cdot\left(\frac{dP_y}{dy}-\frac{dQ_x}{dx}\right)=X$; быт'ће

$$\frac{dz}{z}=X\,dx \quad \ldots\ldots \quad (p.,$$

и одтудъ

$$lz=\int X\,dx, \quad \text{т. е.}$$

$$z=e^{\int X\,dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I.$$

На истый начинъ добыли бы за случай да z треба да буде нека функція само одъ y,

$$\frac{dz}{z}=\frac{1}{P}\cdot\left(\frac{dQ_x}{dx}-\frac{dP_y}{dy}\right)dy=Y\,dy \quad \ldots \quad (q.,$$

и одтудъ

$$z=e^{\int Y\,dy} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II.$$

Єдначине $p.$) и $q.$) показат'ће да ли є z функція само x или само одъ y, и тиме хоће ли се моћи дата єдначина интегралити по образцима I. и II.

§ 161.

Примеръ. Нека буде дата єдначина

$$dy+My\,dx=N dx.$$

гди M и N представляю неке функціе само одъ x *).

Та єдначина сведена на нулу дає

$$dy+(My-N)\,dx=0.$$

При ньой є дакле $P=My-N$, а $Q=1$; пошто пакъ M и N садрже само x а никако y, то є

---

*) Ова єдначина принадлежи такозванимъ линеарнимъ єдначинама.

$$\frac{1}{Q}\cdot\left(\frac{dP_y}{dy}-\frac{dQ_x}{dx}\right)=M,$$ и зато

$$z=e^{\int M\,dx}$$

Множећи дакле дату єдначину са овимъ чинителѣмъ добыямо

$$e^{\int M dx}\,.\,dy+(My-N)\,e^{\int M\,dx}\,.\,dx=0,$$

єдначину т. є., коє є лева часть, каошто се лако увераваmo, подпуный диференціалъ, и кою дакле можемо интегралити по § 147.

Поступаюћи по упутству тога §-а налазимо

$$w=\int e^{\int M\,dx}\,.\,dy=y\,.\,e^{\int M\,dx},\ \frac{dw}{dx}=y\,M\,e^{\int M\,dx},$$

$$(My-N)\,e^{\int M\,dx}-\frac{dw}{dx}=-N\,e^{\int M\,dx},$$

и зато траженый интегралъ

$$y\,e^{\int M\,dx}-\int N\,e^{\int M\,dx}\,.\,dx=C,\quad \text{или}$$

$$y=e^{-\int M\,dx}\,.\left[\int N\,e^{\int M\,dx}\,.\,dx+C\right].$$

§ 162.

Узмимо да є дата диференціална єдначина $Pdx+Qdy=0$ єдностепена, т. є. да су P и Q єдностепене функціе m. реда одъ x и y.

Ако є притомъ z интегралећій чинитель, и као такавъ єдностепена функція одъ x и y n. реда, онда є подпуный диференціалъ $Pz\,.\,dx+Qz\,.\,dy=dv$ єдностепена

функція $(m+n)$. реда, и зато траженый интегралъ по § 151. єдностепена функція $(m+n+1)$. реда, тако да є по истомъ §-у

$$Pz \,.\, x + Qz \,.\, y = (m+n+1)\, v \,.$$

Делећи подпуный диференціалъ тражене функціе v са овомъ єдначиномъ слѣдує

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{Px + Qy} = \frac{dv}{m+n+1} \,.$$

Пошто є пакъ десна часть ове єдначине интегральива, то мора быти и лева; но броитель леве части ніє нико другій него дата диференціална єдначина; зато чинитель кои є ту єдначину учинїо интегральивомъ ніє нико другій, но $\frac{1}{Px+Qy}$.

§ 163.

Примери. 1. Дата є єдностепена єдначина другога реда.

$$y^2 \,.\, dx + xy\,(dx + dy) + x^2\, dy = 0 \,.$$

При той є $P = y^2 + yx = y(x+y), Q = x^2 + xy = x(x+y)$, дакле нѣнъ интегралећій чинитель $\frac{1}{Px+Qy} = \frac{1}{2xy\,(x+y)}$, и зато множенї є съ ньимъ

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \text{подпуный диференціалъ.}$$

Интегралећи ову єдначину слѣдує

$$lx + ly = l\,xy = c = le^c \,, \text{ и одтудъ}$$

$$xy = e^c = C \,.$$

2.) Дата є єдностепена єдначина такођеръ другога реда

$$y^2 . dx - xy . dy + x^2 . dy = 0.$$

Ту є $P = y^2$, $Q = x^2 - xy$, дакле њенъ интегралећій чинитель

$$\frac{1}{Px + Qy} = \frac{1}{xy^2 + x^2 y - xy^2} = \frac{1}{x^2 y}$$; и зато

$$\frac{y\,dx}{x^2} + \frac{x-y}{xy} . dy = \frac{y\,dx}{x^2} + \frac{dy}{y} - \frac{dy}{x} = 0,$$

коя є, каошто се лако можемо уверити, подпуный диференціалъ.

Интегралећи садъ ову єдначину добыямо

$$-\frac{y}{x} + ly - \frac{y}{x} = -2\frac{y}{x} + ly = C.$$

γ. Уводенѣ новы пременљивы броєва.

§ 164.

Издаду ли оба прећашня начина, онда кушамо іошъ неможемо ли учинити дату єдначину интегральивомъ тиме, да нове пременљиве броєве уведемо.

Тако н. п. ако бы имали у § 161. сматрану єдначину

$$dy + My\,dx = N\,dx,$$

гди M и N представляю функціє само одъ x, па бы ставили

$$y = vz, \text{ дакле } \frac{dy}{dx} = z . \frac{dv_x}{dx} + v . \frac{dz_x}{dx},$$

добыли бы єдначину

$$z . \frac{dv_x}{dx} + v . \frac{dz_x}{dx} + Mvz = N,$$

у коіой, да бы ю свели на простіи видъ, можемо са єднимъ одъ новы пременльивы броєва располагати по вольи.

Ставляюћи н. п. $\frac{dz_x}{dx} + Mz = 0$, прелази пређашня єдначина у нову $z \cdot \frac{dv_x}{dx} = N$, и мы после изъ ове две єдначине налазимо врло лако броєве v и z, па дакле и y.

Изъ прве одъ њи слѣдуе просто

$$\frac{dz_x}{z} + Mdx = 0, \quad \text{и одтудъ интеграленћмъ}$$

$$lz + \int Mdx = c, \quad \text{а}$$

$$z = \frac{e^c}{e^{\int Mdx}} = e^c \cdot e^{-\int Mdx} = C \cdot e^{-\int Mdx}.$$

Поставляюћи пакъ ову вредностъ у ону другу єдначину добыямо

$$dv = \frac{N}{C \cdot e^{-\int Mdx}} \cdot dx, \quad \text{и одатле}$$

$$v = \frac{1}{C} \cdot \int Ne^{\int Mdx} \cdot dx + C_1.$$

Быт'ће дакле

$$y = vz = e^{-\int Mdx} \cdot \int Ne^{\int Mdx} \cdot dx + C_1 \cdot Ce^{-\int Mdx}$$

$$= e^{-\int Mdx} \cdot \left[\int Ne^{\int Mdx} \cdot dx + \mathfrak{C}\right]$$

каогодъ у § 161.

§ 165.

Ако су у єдначини $Pdx + Qdy = 0$ функціе P и Q єдностепене n. реда, па поставимо $y = xz$, дакле $dy = zdx + xdz$, постаю исте функціе P и Q односно вида $x^n \cdot f(z)$ и $x^n \cdot \varphi(z)$, тако да после место дате єдначине имамо нову

$$f(z)\,dx + \varphi(z)\,.\,(z dx + x dz) = 0, \quad \text{или}$$

$$f(x) + \varphi(z)\,.\left(z + x\,.\,\frac{dz}{dx}\right) = 0, \quad \text{или}$$

$$[f(z) + \varphi(z)\,z]\,dx + x\,.\,\varphi(z)\,dz = 0\,, \quad \text{или}$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{\varphi(z)}{f(z) + z\,.\,\varphi(z)}\,.\,dz = 0, \quad \text{и одтуда}$$

$$lx + \int \frac{\varphi(z)dz}{f(z) + z\varphi(z)} = c\,,$$

Тако н. п. ако имамо єдностепену єдначину првога реда

$$x dx + y dx = n y dx\,, \quad \text{или што є свеєдно}$$

$$(x - ny)\,dx + y dy = 0\,, \quad \text{па ставимо} \quad y = xz\,,$$

слѣдуе

$$(1 - nz + z^2)\,dx + xz\,.\,dz = 0\,, \quad \text{или}$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{z dz}{1 - nz + z^2} = 0\,, \quad \text{и одтудъ}$$

$$lx + \int \frac{z dz}{1 - nz + z^2} = c\,,$$

изразъ, кои далѣ лако можемо израдити или помоћу обр. 32. § 190., или по упутству §§а 92. — 96.

§ 166.

Узмимо іошъ, подъ именомъ Рикати-ове (Riccati) познату єдначину

$$dy + by^2\,.\,dx = ax^m\,.\,dx$$

1. Ако є при той $m = 0$, добыямо одма єдначину съ одлученимъ пременльивимъ броєвима

$$\frac{dy}{by^2 - a} + dx = 0, \quad \text{и одтудъ}$$

$$\int \frac{dy}{by^2 - a} + x = c, \quad \text{изразъ, кога далѣ израђенѣ неподлежи никаквой више тешкоћи.}$$

2. Ако пакъ m ніє нула, онда треба метнути

$$y = z^r, \quad \text{дакле} \quad dy = rz^{r-1}.\, dz.$$

Тиме преображава се дата єдначина у нову

$$r\,.\,z^{r-1}.\,dz + (bz^{2r} - ax^m)\,dx = 0.$$

Ова єдначина постає єдностепена, ако є $m = -2$, а поставимо $r = -1$. Ніє ли пакъ $m = -2$, онда є горня замена безуспешна.

3. Поставляюћи $y = \alpha x^p + zx^q$, прелази дата єдначина у нову

$$x^q.\,dz + (qx^{q-1} + 2\alpha b x^{p+q} + bx^{2q}\,.\,z)\,z dx$$

$$+ (p\alpha x^{p-1} + \alpha^2 b x^{2p} - ax^m)\,dx = 0.$$

Узимаюћи ту $p - 1 = 2p$, $p\alpha + b\alpha^2 = 0$, и $q + 2\alpha b = 0$, дакле $p = -1$, $\alpha = \frac{1}{b}$, $q = -2$, и зато $y = \frac{z}{x^2} + \frac{1}{bx}$: добыямо єдначину

$$dz + b\,\frac{z^2}{x^2}\,dx - ax^{m+2}.\,dx = 0,$$

коя постає єдностепена, ако є $m = -2$.

У случаю ако бы было $m = -4$, можемо променљиве броєве одлучити, и по томе Рикати-ову єдначину можемо интегралити, ако є m или -2, лии -4.

2.) Интеграленѣ диф. єдначина' првога реда, по $\frac{dy}{dx}$ одъ выши степена'.

§ 167.

Диференціална єдначина првога реда одъ два променльива броя x и y съ вышимъ степенима количника $\frac{dy}{dx}$, обштега є вида

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + V_1 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + V_2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + .. + V_{n-1} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) + V_n = 0,$$

гди V_1, V_2, ... V_n; представляю уобште неке функціе одъ x и y.

Разрешаваюћи ту єдначину по $\frac{dy}{dx}$, и означаваюћи нѣне корене, кои ће уобште быти неке функціе одъ x и y, по реду са ω_1, ω_2, ... ω_n, добыли бы n диференціалны єдначина' првога степена

$$\frac{dy}{dx} - \omega_1 = 0, \frac{dy}{dx} - \omega_2 = 0, \ldots \frac{dy}{dx} - \omega_n = 0,$$

коє бы се лако могле интегралити по упутствама предходећи §§а, нађени пакъ одъ њи интеграли были бы свакій, каогодъ и свакій производъ одъ произвольно колико њи, єдна вредность траженога интеграла дате диференціалне едначине.

Али пошто налазакъ тій интеграла зависи одъ решеня выше єдначине, а то є, каошто знамо, само у врло малимъ границама уобште (т. є. алгебрайскимъ путемъ) могуће, то ће се наговешћеный начинъ такођеръ само врло редко моћи употребити, и зато показат'ћемо у слѣдуюћимъ §§ма, како у особитимъ некимъ случаєвима можемо иначе до цѣли доћи, но найпре да узмемо за веће нѣгово обясненѣ баръ овай єданъ примеръ.

Дата є єдначина $d^2y + dy \,.\, dx - \frac{3}{4} d^2x = 0$, или што є свеєдно,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{3}{4} = 0.$$

Разрешаваюћи є по $\frac{dy}{dx}$ налазимо да є $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ и $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}$, одтудъ $dy = \frac{1}{2}\,dx$ и $dy = -\frac{3}{2}\,dx$, а одатле опеть $y = \frac{1}{2}x + c_1$ и $y = -\frac{3}{2}x + c_2$.

Траженый є дакле интегралъ дате диференціалне єдначине или

$$y - \tfrac{1}{2}x - c_1 = 0, \quad \text{или} \quad y + \tfrac{3}{2}x - c_2 = 0,$$

а може быти и

$$(y^2 - \tfrac{1}{2}x - c_1) \cdot (y + \tfrac{3}{2}x - c_2) =$$

$$y^2 + (x - c_1 - c_2)\,y + c_1 c_2 - \tfrac{1}{2}(3c_1 - c_2)\,x - \tfrac{3}{4}x^2 = 0,$$

єръ ако ову єдначину диференціалимо, слѣдує

$$(y + \tfrac{3}{2}x - c_2) \cdot (dy - \tfrac{1}{2}dx) + (y - \tfrac{1}{2}x - c_1) \cdot (dy + \tfrac{3}{2}dx) =$$

$$(2y + x - c_1 - c_2)\,dy + (y - \tfrac{3}{2}x - \tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2)\,dx = 0,$$

и одтудъ

$$dy = -\frac{y - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2}{2y + x - c_1 - c_2} \cdot dx,$$

а ако овде іошъ место y узмемо нѣгове две горнѣ вредности,

$$dy = \tfrac{1}{2}dx \quad \text{и} \quad dy = -\tfrac{3}{2}dx,$$

кои изрази, каошто смо видили, дату диференціалну єдначину подпуно задоволяваю.

§ 168.

Ако су у датой диференціалной єдначини сачинитељи $V_1, V_2, \ldots V_n$ сви стални броєви, онда су по свойству сачинителя сваке выше єдначине (I. Ч. § 37.) и вредности одъ $\frac{dy}{dx}$ такођеръ стални броєви, и дата се єдначина збогъ тога врло лако може интегралити.

Єръ представляюћи те сталне вредности одъ $\frac{dy}{dx}$ съ α, т. є. ставляюћи $\frac{dy}{dx} = \alpha$, слѣдує $dy = \alpha dx$, дакле $y = \alpha x + c$, а $\alpha = \frac{y-c}{x}$, тако да само треба метнути у дату єдначину ову вредность место $\frac{dy}{dx} = \alpha$, те да бы имали траженый исте єдначине интегралъ.

Тако н. п. нека є опетъ дата єдначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{3}{4} = 0.$$

Имамо поставляюћи место $\frac{dy}{dx}$ горню вредность одъ α,

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^2 + \frac{y-c}{x} - \frac{3}{4} = 0, \quad \text{или}$$

$$(y-c)^2 + (y-c)\,x - \frac{3}{4}x^2 = 0,$$

као траженый интегралъ те єдначине, о чему се лако увераваmo тиме, што изъ добывенога израза, разрешаваюћи га по $(y-c)$, слѣдує $y - c = -\frac{1}{2}x \pm x$, т. є. $y = \frac{1}{2}x + c$ и $y = -\frac{3}{2}x + c$, каогодъ што смо нашли у предходећемъ §у.

§ 169.

Ако су сачинительи $V_1, V_2, \ldots V_n$ дате диферен-ціалне єдначине функціє само єдногъ пременльивога броя, н. п. одъ x, па пошто смо поставили $\frac{dy}{dx} = v$ приметимо, да исту єдначину лакше можемо разрешити по x него по v, — онда ћемо тражити єдначину $x = f(v)$, определит'ћемо изъ горнѣ замене y, и истребит'ћемо изъ єдначина $x = f(v)$ и $y = \int v dx = vx - \int x dv = vx - \int f(v)\,dv$ [III. основно правило § 85.] брой v, па ћемо тако имати траженый интегралъ дате єдначине.

Тако н. п. ако є дата єдначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a\left(\frac{dy}{dx}\right) - x = 0,$$

и метнемо $\frac{dy}{dx} = v$, слѣдує

$$v^2 + av - x = 0,$$

єдначина, коя се лакше разрешава по x него по v.

Разрешаваюћи є добыямо $x = v^2 + av$; како є пакъ $y = vx - \int (v^2 - av)\, dv = vx - \frac{v^3}{3} - \frac{av^2}{2} + c$, то слѣдує истребльиванѣмъ броя v изъ овы єдначина за x и y, као траженый интегралъ дате диференціалне єдначине

$$6y + (3 + a) \cdot \left[a^2 + 3x + (x + a)^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{4x}{a^2}}\right] - c = 0.$$

§ 170.

Ако су сачинителъи $V_1, V_2, \ldots V_n$ функціє оба променльива броя x и y, али се єданъ одъ овы броєва, н. п. x налази само у првомъ степену: онда ћемо, пошто смо ставили $\frac{dy}{dx} = v$, дату єдначину разрешити по x, и єдначину $x = f(y, v)$ диференціалити. Нека є тако добывена нова диференціална єдначина $dx = Tdy + Udv$, гди T и U представляю неке функціє одъ y и v.

Изъ те єдначине добыямо после, збогъ $dy = vdx$,

$$(Tv - 1)\, dx + Udv = 0.$$

Садъ, ако се ова єдначина може интегралити, онда, интегралећи ю, добыямо єдну єдначину по x и v, съ коіомъ можемо истребити изъ дате єдначине брой $v = \frac{dy}{dx}$, и у добывеной новой єдначини имамо после траженый интегралъ дате диференціалне єдначине.

Н. п. ако є дата єдначина $ydx - x\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$,

имамо, стављајући $\frac{dy}{dx} = v$,

$y = x\sqrt{1+v^2}$, дакле $dy = dx.\sqrt{1+v^2} + \frac{xvdv}{\sqrt{1+v^2}}$,

или због $dy = vdx$,

$$(v - \sqrt{1+v^2})\,dx - \frac{xvdv}{\sqrt{1+v^2}} = 0, \quad \text{или}$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{vdv}{(v - \sqrt{1+v^2}).\sqrt{1+v^2}} = 0,$$

или, ако помножимо броитеља и именитеља другога члана са $v + \sqrt{1+v^2}$,

$$\frac{dx}{x} - \frac{v\,(v+\sqrt{1+v^2})\,dx}{\sqrt{1+v^2}} = 0, \text{ или}$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{v^2dv}{\sqrt{1+v^2}} - vdv = 0, -$$

и одтудъ интегралењмъ

$$lx - \tfrac{1}{2}\,v.\sqrt{1+v^2} + \tfrac{1}{2}\,l\,(v+\sqrt{1+v^2}) - \tfrac{1}{2}\,v^2 + C = 0,$$

єдначина одъ x и v, изъ кое садъ помоћу дате єдначине ваља истребити брой v.

У име тога имамо изъ дате єдначине (пошто смо y определили и $\frac{dy}{dx} = v$ поставили) $v = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$, та пакъ вредность постављена у прећашню єдначину дає

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x^2}\cdot\sqrt{y^2-x^2} + \frac{1}{2}\,l\,(y+\sqrt{y^2-x^2}) - \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2-x^2}{x^2} + C = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\,l\,(y+\sqrt{y^2-x^2}) - \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2-x^2+y\sqrt{y^2-x^2}}{x^2} + C = 0,$$

као траженый интегралъ дате єдначине.

§ 171.

Ако сачинитељи дате једначине садрже x и y само у првимъ степенима, онда је вида

$$y = x f(v) + \varphi(v),$$

где је $v = \frac{dy}{dx}$, и може се интегралити по § 161. или 164.

У особитомъ случаю, где бы была $f(v) = v$, дакле дата једначина вида

$$y = xv + \varphi(v),$$

добыямо диференціалећи $dy = vdx + xdv + d\varphi(v)$, или због $dy = vdx$,

$$xdv + d\varphi(v) = 0, \quad \text{т. е.}$$

$$xdv + \varphi_1(v)\,dv = [x + \varphi_1(v)]\,dv = 0.$$

Ова једначина постои са $x + \varphi_1(v) = 0$, каогодъ и са $dv = 0$; но ова последня једначина даје $v = c$, дакле $dy = cdx$, и зато ако ову вредность узмемо у датой једначини,

$$y = cx + \varphi(c) = cx + c_1,$$

као траженый интегралъ. Притомъ само іошъ ваља приметити, да брой c_1 није произвольно сталанъ, него вредность одъ $\varphi(v)$, ако се место v узме c, и зато ће быти болѣ да пишемо као траженый интегралъ.

$$y = cx + \varphi(v).$$

Нека је н. п. дата једначина $ydx - xdy - a\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$,

или $y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) - a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$, **или ако ставимо**

$\frac{dy}{dx} = v$,

$$y - xv - a\sqrt{1 + v^2} = 0.$$

Изъ те єдначине слѣдує $y = xv + a\sqrt{1+a^2}$, а ако диференціалимо,

$$dy = vdx + xdv + \frac{avdv}{\sqrt{1+v^2}}, \text{ или због } dy = vdx,$$

$$xdv + \frac{avdv}{\sqrt{1+v^2}} = 0, \text{ или}$$

$$\left(x + \frac{av}{\sqrt{1+v^2}}\right) dv = 0.$$

Ова єдначина дає $x + \frac{av}{\sqrt{1+v^2}} = 0$ и $dv = 0$, а изъ последнч одъ ове две слѣдує $v = c$.

Ставляюћи садъ ово v у дату єдначину добыямо као траженый нѣнъ интегралъ

$$y = cx + a\sqrt{1+c^2}.$$

§ 172.

Ако су сачинителъи дате єдначине єдностепене функціє одъ x и y, ставлямо $y = xz$, дакле $dy = zdx + xdz$. Тиме губи се брой x, и остає єдначина само по z и v, ако подъ v разумемо све єднако количникъ $\frac{dy}{dx}$.

Пошто є по прећашньой замени $\frac{dy}{dx} = v = z + x\frac{dz}{dx}$, то є

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{v-z}, \text{ и одтудъ}$$

$$lx = \int \frac{dz}{v-z} \ldots . (\alpha.$$

Разломакъ $\frac{dz}{v-z}$ можемо безъ повреде нѣгове вредности писати и овако: $\frac{d(z-v)}{z-v} + \frac{dv}{z-v}$; но тадъ є іошъ

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(z-v)}{z-v} + \frac{dv}{z-v}, \text{ а}$$

$$lx = l(z-v) + \int \frac{dz}{z-v} \ldots \ldots (\beta.$$

Са изразомъ α.) служит'ћемо се, ако є лакше изразити v чрезъ z, а другій β.) употребит'ћемо кадъ се лакше изражава z чрезъ v. У првомъ случаю добыт'ћемо x као функцію одъ z, а у другомъ као функцію одъ v.

Истреблююћи после у првомъ случаю изъ єдначина $y = xz$ и $x = f(z)$ брой z, а у другомъ случаю изъ єдначина $y = xz = x\varphi(v)$ и $x = \psi(v)$ брой v, — добыямо траженый интегралъ.

Н. п. решаваюћи на овай начинъ єдначину пређашнћега §а, коя є по x и y єдностепена, т. є. єдначину $xdy - ydx - x\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$, или

$$xv - y - x\sqrt{1+v^2} = 0,$$

где v значи $\frac{dy}{dx}$, ставлямо $y = xz$, чимъ слћдуе

$$v - z = \sqrt{1+v^2}.$$

Пошто є пакъ овде очевидно лакше изразити z чрезъ v, него обратно, то имамо далћ по образцу β.) збогъ $z - v = (v - \sqrt{1+v^2}) - v = -\sqrt{1+v^2}$,

$$lx = -l\sqrt{1+v^2} + \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$= -l\sqrt{1+v^2} + l[v + \sqrt{1+v^2}] + lC$$

$$= l\frac{C(v+\sqrt{1+v^2})}{\sqrt{1+v^2}}, \text{ и одтуда}$$

$$x = \frac{C(v+\sqrt{1+v^2})}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Съ овомъ садъ вредности броя x слѣдує изъ єдначине $y = xz$, због $z = v - \sqrt{1+v^2}$,

$$y = \frac{C(v+\sqrt{1+v^2})}{\sqrt{1+v^2}} \cdot (v-\sqrt{1+v^2}) = -\frac{C}{\sqrt{1+v^2}}.$$

За истребльиванѣ броя v имамо изъ ове последнѣ єдначине $\sqrt{1+v^2} = -\frac{C}{y}$, а $v = \frac{\sqrt{C^2-y^2}}{y}$; та пакъ вредность, заменута у горнѣмъ изразу за x, дає као траженый интегралъ вопросне диференціалне єдначине

$$x = C - \sqrt{C^2-y^2}, \text{ или } x^2+y^2 = 2Cx.$$

3.) Особени разрешци диф. єдначина првога реда.

§ 173.

Знамо изъ § 81. и 82., да свакій обштій интегралъ садржи некій, іошъ непознатый сталанъ брой, и да дающи томе брою произвольне вредности, добыямо безбройно млого тога интеграла **особиты** вредностій, коє смо назвали **особитимъ** интегралима, и коє све дотичной диференціалной єдначини подпуно одговараю. Но добыяю се често и такове функціє, коє некой диференціалной єдначини такођеръ подпуно одговараю, безъ да су нѣни особити интеграли, т. є. безъ да се изъ обштегъ нѣногъ интеграла могу произвести на прећеспоменутый начинъ. Свака такова функція, коя датой некой диференціалной єдначини подпуно одговара, а ніе нѣнъ особитый интегралъ, зове се **особеный разрешакъ** исте диференціалне єдначине.

Тако н. п. нашли смо у § 171. $y = cx + a\sqrt{1+c^2}$ као обштій интегралъ диференціалне єдначине $ydx - xdy - a\sqrt{d^2x+d^2y} = 0$; но добыямо такођеръ изъ єдначине

$x + \frac{av}{\sqrt{1+v^2}} = 0$ (види споменутый §) вредности $v = \pm\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ и $\sqrt{1+v^2} = \mp\frac{a}{\sqrt{a^2-v^2}}$, кое поставлѣне у дату диференціалну єдначину (подъ видомъ $y - xv - a\sqrt{1+v^2} = 0$, гди є $v = \frac{dy}{dx}$), даю єдначину

$$y = \pm\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \mp \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pm x^2 \mp a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mp\sqrt{a^2-x^2},$$

или

$$y^2 + x^2 = a^2,$$

коя истой диференціалной єдначини подпуно одговара, безъ да се икаквомъ вредности броя c може добыти изъ нѣногъ обштегъ интеграла $y = cx + a\sqrt{1+c^2}$.

Та є дакле єдначина $y^2 + x^2 = a^2$ особеный разрешакъ оне диференціалне єдначине.

§ 174.

За болѣ сваћанѣ особены разрешкова диференціалны єдначина узмимо, да смо решенѣмъ некога задатка наишли на єдначину

$$v.\left(\frac{dv}{dy} - 1\right) = 0,$$

при коіой є очевидно, да постои како при $\frac{dv}{dy} - 1 = 0$, тако и при $v = 0$.

Уведимо у ту єдначину новый променљивый брой x на тай начинъ, да метнемо $v = \sqrt{x^2+y^2-a^2}$. Быт'ће $dv = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$, а нова єдначина

$$\sqrt{x^2+y^2-a^2}.\left(\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} - dy\right) = 0.$$

Докъ ову єдначину оставимо у томъ нѣномъ виду, дотле види се ясно, да ю како $\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0$, тако и $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}-dy=0$ задоволяваю, и да вредность броя x, коя слѣдує изъ првогъ израза, уобште независи одъ нѣгове вредности, кою бы добыли изъ интегралѣногъ другогъ израза. Свршимо ли пакъ мложенѣ у левой части, онда добыя иста єдначина видъ

$$x\,dx+y\,dy-dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0,$$

гди се неможе ни познати више, да є и $\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ нѣнъ чинитель, єръ ово исто добыямо и само одъ другогъ чинителя, ако га ставимо $=0$, и ослободимо одъ именителя.

Ако дакле ту диференціалну єдначину интегралимо, добыт'ѣемо као нѣнъ интегралъ само оно што дає нѣнъ другій чинитель, а првогъ чинителя одтудъ, зато што одъ оногъ другога независи, никако неможемо наћи.

Тай изгубљѣный чинитель, кога морамо на другій начинъ тражити, оно є, што смо горе разумели подъ функціомъ, коя вопросну диференціалну єдначину задоволява, а ніє нѣнъ особитый интегралъ, и што смо зато назвали нѣнимъ **особенимъ разрешкомъ.**

§ 175.

Нека є дата диференціална єдначина првога реда, коя иначе по $\frac{dy}{dx}$ може быти и одъ вышега степена,

$$U=f(x,y,\frac{dy}{dx})=0;$$

нѣнъ подпуный или обштій интегралъ нека є

$$V=\varphi(x,y,c)=0,$$

гди c представля интеграленѣмъ добывеный сталный брой; найпосле изъ тогъ интеграла произведена дифе-ренціална єдначина буди

$$W = \left(\frac{dV_x}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV_y}{dy}\right) dy = 0.$$

Ако подпуный интегралъ $V = 0$ несадржи брой c са-мо као алгебрайскій сабиракъ, онда ће тога броя c бы-ти безъ сваке сумнѣ и у диференціалной єдначини $W = 0$, и по томе диференціална єдначина $U = 0$, у ко-іой га нема, постає у томъ случаю текъ ако се брой c изъ єдначина $V = 0$ и $W = 0$ истреби. Осимъ тога ла-ко є іошъ увидити, да ће послѣдакъ тога истребльиваня быти истый, ма брой c небыо сталанъ, него као и x и y премеилъивъ.

Зато узмимо да є изъ єдначине $V = 0$ добывена ди-ференціална єдначина, сматраюћи c као пременльивъ брой,

$$W_1 = \left(\frac{dV_x}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV_y}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV_c}{dc}\right) dc = 0.$$

Ово W_1 быт'ће само тако равно W, или што є све-єдно W остає само тако непроменѣно, ако є

$$\left(\frac{dV_c}{dc}\right) dc = 0.$$

Исключуюћи дакле случай гди є $\left(\frac{dV_c}{dc}\right) dc$ због тога $= 0$, што є c сталанъ брой, быт'ће све изъ те єдна-чине добывене вредности броя c као функціє одъ x и y тога свойства, да заменуте у єдначини $W = 0$ даю є-дначине, коє єдначину $U = 0$ подпуно задововоляваю. Пошто пакъ єдначина $W = 0$ после несадржи никакавъ више произвольно сталанъ брой, и дакле такова свой-ства постає, да се изъ подпуногъ интеграла, коій са-мо сталне вредности броя c допушта, никако неможе добыти: то є свака, са онимъ, изъ єдначине $\frac{dV_c}{dc} = 0$

добивенимъ вредностима одъ c поставша єдначина $W = 0$, уобште само особеный разрешакъ дате диференціалне єдначине.

И садъ є ясно, коимъ се начиномъ тій особени разрешци какве диференціалне єдначине налазе. Треба т. є. нађеный обштій интегралъ $V = \varphi(x, y, c) = 0$ по c интегралити, и тай диференціалъ поставити равнъ нули. Одтудъ добывене вредности броя c поставлѣне у обштемъ интегралу, дат'ће тражене особене разрешкове вопросне диференціалне єдначине.

§ 176.

Примеръ. Дата є диференціална єдначина $ydx - x\,dy - a\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$.

Као нѣнъ обштій интегралъ нашли смо у § 171. $y = cx + a\sqrt{1 + c^2}$.

Диференціалећи ову єдначину по c добыямо, ако одма разделимо са dc,

$$x + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}} = 0, \text{ одкуда слѣдуе } c = \pm\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

а съ томъ вредности, због $\sqrt{1+c^2} = -\frac{ac}{x} = \mp\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, ставляюћи є у обштій интегралъ,

$$y = \pm\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mp \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp\sqrt{a^2 - x^2},$$

или $y^2 + x^2 = a^2$, као особеный разрешакъ дате єдначине.

§ 177.

Ако є сталный брой c у нађеномъ обштемъ интегралу $V = \varphi(x, y, c) = 0$ дате какве диференціалне єдна-

чине само у првомъ степену, онда $\frac{dV_c}{dc} = 0$ несадржи више c, и ова є єдначина због тога сама особитый єданъ интегралъ оне дате диференціалне єдначине, о чему се лако можемо уверити на слѣдуюћій начинъ.

Нека су S и T функціе одъ x и y; быт'ће у воспомъ случаю

$$V = S + Tc = 0, \text{ и зато}$$

$$W = dS + c\,dT = 0, \text{ а ако изъ ове две}$$

єдначине уклонимо c,

$$U = T\,dS - S\,dT = 0.$$

У томъ дакле случаю єдначина $\frac{dV_c}{dc} = T = 0$, зато што є и $dT = 0$, єдначину $U = 0$ подпуно задоволява.

Пошто пакъ найпосле изъ єдначине $V = 0$ слѣдує $T = -\frac{S}{c}$, а ово постає $= 0$ за $c = \infty$, то є дакле $T = 0$ особита вредность интеграла одъ $U = 0$ за $c = \infty$, т. є. особитый интегралъ те єдначине.

У § 172. н. п. нашли смо као подпуный интегралъ диференціалне єдначине $x\,dy - y\,dx - x\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$, єдначину

$$x^2 + y^2 = 2Cx.$$

Диференціалећи ову єдначину по C слѣдує $x = 0$, као особитый интегралъ оне диференціалне єдначине при $C = \infty$.

И доиста, ако у подпуномъ интегралу, кои можемо писати и овако: $x = \frac{x^2 + y^2}{2C}$, ставимо $C = \infty$, слѣдує $x = 0$.

§ 178.

Ако є найпосле нађеный општій интегралъ дате какве диференціалне єдначине вида $f(x, y) = c$, т. є. ако є у нѣму сталный брой c одлученъ, онда се са докученимъ правиломъ § 175. нидочега неможе доћи, по томе, што изъ єдначине $V = f(x, y) - c = 0$ слѣдує $\frac{dV_c}{dc} = -1$, єдначина сасвимъ независна одъ броя c, коєга бы се вредности одтуда имале определити.

Како у томъ случаю валя поступати, научит'ће насъ слѣдующе сматранѣ.

Ако изъ єдначине $V = \varphi(x, y, c) = 0$ изнађемо $c = f(x, y)$, и после ту вредность поставимо у ню исту, добыямо изразъ $0 = 0$ за знакъ, да єдначина са заменутимъ c постои за сваку вредность броя x и сваку вредность броя y. Изъ тога узрока мораю быти и диференціали те єдначине по x и по y свакій по себи раванъ нули, мора быти

$$dV_x = 0 \quad \text{као и} \quad dV_y = 0, \quad \text{или што є свеєдно}$$

$$\frac{dV_x}{dx} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dV_y}{dy} = 0.$$

Пошто є пакъ, ако ради краткоће задржимо c место $f(x, y)$, и притомъ іошъ представимо са $\left[\frac{dV_x}{dx}\right]$ диференціалный количникъ одъ V по x само одъ оны чланова съ x; кои нису у c, подобно са $\left[\frac{dV_y}{dy}\right]$ диференціалный количникъ одъ V по y само одъ чланова съ y, кои су изванъ c, —

$$\frac{dV_x}{dx} = \left[\frac{dX_x}{dx}\right] + \left(\frac{dV_c}{dc_x}\right) \cdot \left(\frac{dc_x}{dx}\right), \text{ а}$$

$$\frac{dV_y}{dy} = \left[\frac{dV_y}{dy}\right] + \left(\frac{dV_c}{dc_y}\right) \cdot \left(\frac{dc_y}{dy}\right),$$

и ти изрази по пређашньой приметби мораю быти свакій $= 0$: то слѣдує

$$\left(\frac{dc_x}{dx}\right) = -\left[\frac{dV_x}{dx}\right] : \left(\frac{dV_c}{dc_x}\right) \text{ и}$$

$$\left(\frac{dc_y}{dy}\right) = -\left[\frac{dV_y}{dy}\right] : \left(\frac{dV_c}{dc_y}\right).$$

Пошто смо найпосле нашли, да за свакій особеный разрешакъ мора быти $\frac{dV_c}{dc} = 0$, то є ясно, да пређашньи изрази за свакій особеный разрешакъ мораю быти безкрайни. Но каогодъ што дата диференціална єдначина немора непремено имати за сваку изъ $\frac{dV_c}{dc} = 0$ слѣдующу вредность броя c особены разрешкова, тако исто немораю быти ни све оне вредности, за кое постаю количници $\frac{dc_x}{dx}$ и $\frac{dc_y}{dy}$ безкрайни, особени разрешци.

§ 179.

Изъ овога подає се дакле за истраживанѣ особены разрешкова какве дате диференціалне єдначине, у кое подпуномъ интегралу стои сталный брой c одлученъ, слѣдующе правило:

Треба определити изъ подпуногъ интеграла $c = f(x, y)$ вопросне диференціалне єдначине, $\frac{dc_x}{dx}$ и $\frac{dc_y}{dy}$, и извидити, могу ли именитељи тіи количника постати равни нули, дакле они сами безкрайни? ако то буде, онда су они именитељи, свакій $= 0$, тражени особени разрешци вопросне диференціалне єдначине.

Н. п. нека є дата єдначина $dy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$.

Њнъ є подпуный интегралъ $c = -y + \sqrt{x^2+y^2-a^2}$,

и зато $\frac{dc_y}{dy} = -1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}-y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$,

а $\frac{dc_x}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$.

Оба ова количника имаю єдногъ истогъ именителя, кои може быти 0, ако є $x^2+y^2=a^2$. Они дакле постаю безкрайни при $x^2+y^2-a^2=0$, и зато є ова єдначина особеный разрешакъ оне диференціалне єдначине.

Нѣкъ е подпуный интегралъ $c = -y + \sqrt{x^2+y^2-a^2}$, и зато $\frac{dc_y}{dy} = -1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}-y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$, а $\frac{dc_x}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$.

Оба ова количника имаю едногъ истогъ именителя, кои може быти c, ако е $x^2+y^2=a^2$. Они дакле постаю безкрайни при $x^2+y^2-a^2=c$, и зато е она единична особеный разрешакъ оне диференціалне едначине.

Пошто смо найпосле нашли, да за сваній особеный разрешакъ мора быти $\frac{dV_c}{dc}=c$, то е ясно, да пређашньи изрази за сваній особеный разрешакъ мораю быти безкрайни. Но каогодъ што дата диференціална едначина немора непремено имати за сваку изъ $\frac{dV_c}{dc}=c$ слѣдуюћу вредность брои c особены разрешкова, тако исто немораю быти ни сие оне вредности, за кое постаю количници $\frac{dc_x}{dx}$ и $\frac{dc_y}{dy}$ безкрайни, особени разрешци.

§ 179.

Изъ овога подае се дакле за истраживанѣ особены разрешкова какве дате диференціалне едначине, у кое подпуномъ интегралу стои сталный брой c одлученъ, слѣдуюће правило:

Треба определити изъ подпуногъ интеграла $c = f(x, y)$ вопросне диференціалне едначине, $\frac{dc_x}{dx}$ и $\frac{dc_y}{dy}$, и изнидити, могу ли именительи тіи количника постати равни нули, дакле они сами безкрайни? ако то буде, онда су они именительи, сваній $= c$, тражени особени разрешци вопросне диференціалне едначине.

Н. п. нека е дата едначина $dy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$.

КЊИГА III.

ВАРІЯЦІОНЬЫЙ РАЧУНЪ.

А. Развіянѣ функція одъ безкрайны редова у безкрайне редове.

§ 180.

Често появлює се потреба, да неку функцію $V = f(v, w, y, \ldots)$, коя є уобште или основна, и као такова или одкривена или скривена, или є диференціална, или пакъ некій интегралъ, али у коіой су $v, w, y, \ldots$ безкрайни редови истогъ пременьивогъ броя, н. п. x, развіємо у безкрайный редъ целы положны степена тога броя x.

Тай посао ніє новъ, єръ є по Маклореновомъ образцу (§ 32.) уобште, т. є. была функція V каква му драго,

$$V = \underset{0}{V} + \underset{0}{V_1} \cdot x + \underset{0}{V_2} \cdot \frac{x^2}{2!} + \underset{0}{V_3} \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots,$$

гди $\underset{0}{V}$ представля исту функцію V пошто у нѣой изменимо x са нуломъ, а $\underset{0}{V_1}, \underset{0}{V_2}, \underset{0}{V_3}, \ldots$ єсу по реду нѣне изводне функціе, у коима є такођеръ x изменуто съ 0. Али колико због тога, што се исти сачинительи вопроснога реда V могу добыти іошъ и на другій, лакшій начинъ, толико и зато, што упознаваюћи се са тимъ

другимъ начиномъ докучуємо іошъ и друге важне поуке — занимат'ћемо се у слѣдующимъ §§ма съ истимъ посломъ нешто изближе.

§ 181.

Представляюћи са $^{n}\partial V$ уобште оно, што остає одъ n. изводне функціе одъ V, т. є. одъ V_n, пошто место x узмемо 0, и пишући место $^{1}\partial V$ простіе само ∂V, имамо по Маклорену редъ

$$V = {}^{0}\partial V + \partial V . x + {}^{2}\partial V . \frac{x^2}{2!} + {}^{3}\partial V . \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

Нека є садъ $v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$ уобште некій датый или тражећи се редъ целы степена' одъ x, и притомъ сачинитељи $a_0, a_1, a_2, \ldots$ сасвимъ произвольне, но x несадржеће функціе.

Ставляюћи у томъ реду $x = 0$; слѣдує $v_0 = a_0$; образуюћи пакъ по реду његове изводне функціе, и узимаюћи у свакой такођеръ $x = 0$, добыямо по реду

$v_1 = a_1$	$v_3 = 3!\, a_3$	уобште $v_n = n!\, a_n$,
$v_2 = 2!\, a_2$	$\ldots\ldots\ldots$	а одатле

$a_1 = v_1 = \partial v$	$a_3 = \frac{1}{3!} \cdot v_3 = \frac{1}{3!} \cdot {}^{3}\partial v$	
$a_2 = \frac{1}{2!} \cdot v_2 = \frac{1}{2!} \cdot {}^{2}\partial v$	$\ldots\ldots\ldots\ldots$	уобште

$$a_n = \frac{1}{n!} \cdot v_n = \frac{1}{n!} \cdot {}^{n}\partial v .$$

Редъ v дакле можемо безъ икакве повреде писати и овако

$$v = {}^{0}\partial v + \partial v . x + {}^{2}\partial v . \frac{x^2}{2!} + {}^{3}\partial v . \frac{x^3}{3!} + \ldots + {}^{n}\partial v . \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

гди є $^{n}\partial v = n!\, a_n$, т. є. оно што одъ v_n (n. изводне функціе истога реда v) остає, ако место x узмемо нулу. И ово постои изъ исты узрока и за свакій другій редъ целы степена одъ x.

Символъ $^{n}\partial v$ или $^{n}\partial V$ изговарат'ћемо у будуће: n. изводъ одъ v или одъ V.

§ 182.

Изъ предходећегъ §а можемо извести слѣдующе важне истине.

Нека су $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$ два безкрайна реда целы степена одъ x, а сачинительи у истимъ редовима функціе єдногъ истогъ пременльивогъ броя y, или исты пременльивы броєва $y, z, \ldots$.

Пошто $^{r}\partial u$ и $^{r}\partial v$ представляю по пређашнѣмъ §у оно што остає одъ u_r и v_r (т. є. одъ r. изводны функція одъ u и v), кадъ се у ньима узме 0 место x; пошто є далѣ свеєдно, хоће ли се нека функція найпре диференціалити по x, па после диференціалити или интегралити по $y, z, \ldots$, или ће се тай посао извршити противнимъ редомъ; и пошто є найпосле свеєдно, да ли ћемо у диференціалѣной функціи по x найпре узети 0 место x, па онда є текъ диференціалити или интегралити по $y, z, \ldots$, или ћемо и то учинити противнимъ редомъ: то є очевидно, да ако є

1.) $v = (u_n)_r = \dfrac{^{n}du}{d^n z}$, слѣдуе $^{r}\partial v = \dfrac{^{n}d\,(^{r}\partial u)}{d^n z}$,

2.) $v = (u_{m+n})_{my,\,nz} = \dfrac{^{m+n}du}{d^m y \,.\, d^n z}$, „ $^{r}\partial v = \dfrac{^{m+n}d\,(^{r}\partial u)}{d^m y \,.\, d^n z}$,

3.) $v = \int_a^b u\,dz$, „ $^{r}\partial v = \int_a^b \partial u \,.\, dz$, и

4.) $v = \int_{y'}^{y''} \left(\int_{z'}^{z''} u\,dz\right) dy$, „ $^{r}\partial v = \int_{y'}^{y''} \left(\int_{z'}^{z''} {}^{r}\partial u \,.\, dz\right) dy$,

а то ће съ другимъ речима рећи, да є при истямъ предпоставама, по реду

$$\text{I.)}\quad {}^{r}\partial\left(\frac{{}^{n}du}{d^{n}z}\right)=\frac{{}^{n}d\,({}^{r}\partial u)}{d^{n}z},$$

$$\text{II.)}\quad {}^{r}\partial\left(\frac{{}^{m+n}du}{d^{m}y\,.\,d^{n}z}\right)=\frac{{}^{m+n}d\,({}^{r}\partial u)}{d^{m}y\,.\,d^{n}z},$$

$$\text{III.)}\quad {}^{r}\partial\left(\int_{a}^{b}u\,dz\right)=\int_{a}^{b}{}^{r}\partial u\,.\,dz,\quad \text{и}$$

$$\text{IV.)}\quad {}^{r}\partial\left[\int_{y'}^{y''}\left(\int_{z'}^{z''}u\,dz\right)dy\right]=\int_{y'}^{y''}\left(\int_{z'}^{z''}{}^{r}\partial u\,.\,dz\right)dy,$$

гди заграђени изрази лево представляю односно v, а цели леви изрази сачинитељ одъ $\frac{x^{r}}{r!}$ у редовима дотичнога v; и гди дакле десни изрази показую како се ти сачинительи добыяю изъ єдноимены сачинителя ${}^{r}du$ дотичнога реда u.

За образце III. и IV. имамо само іоштъ приметити, да они стоє тако, само докъ границе, међу коима се узимаю интеграли, несадрже и саме x, да се пакъ съ места меняю, чимъ бы и те границе быле какве функціе одъ x. Место првогъ одъ ньи добыямо у томъ случаю

$${}^{r}\partial\left(\int_{a}^{b}u\,dz\right)=\int_{a}^{b}{}^{r}\partial u\,.\,dz+\left(\underset{b}{u}\,.\,{}^{r}\partial b-\underset{a}{u}\,.\,{}^{r}\partial a\right),$$

о чему се лако увераваме интеграломъ $\int_{a}^{b}u\,dz=y$, ако помислимо, да смо у истомъ свудъ гдигодъ има x, дакле у u, a, b и y место x узели $x+h$, да смо све те броєве (по телеровомъ или маклореновомъ образцу) развили у редове по h, и после смо лево и десно задржали само чланове съ h у првомъ степену; єръ тиме слѣдуе, да є при оной предпостави за b и a

$$\partial\int_a^b u\,dz = \int_a^b \partial u \,.\, dz + (u_b \,.\, \partial b - u_a \,.\, \partial a),$$

те зато и горньій образацъ каошто є поставлѣнъ.

Садъ приступимо къ самомъ развіяню функція одъ редова у редове.

§ 183.

Ако є $V = f(v)$, **и притомъ** $v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, **имамо по Маклорену, обзиромъ на § 181.,**

$$V = {}^0\partial V + \partial V \,.\, x + {}^2\partial V \,.\, \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V \,.\, \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

а у име сачинителя овога реда осимъ

$$V = f(v)$$

іошъ изводне функціе одъ V **по** v **као функціи одъ** x,

$$V_1 = f_1(v) \,.\, v_1,$$

$$V_2 = f_2(v) \,.\, v_1^2 + f_1(v) \,.\, v_2,$$

$$V_3 = f_3(v) \,.\, v_1^3 + 3 f_2(v) \,.\, v_1 v_2 + f_1(v) \,.\, v_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

и одтудъ, ако изменемо x **са** 0,

$${}^0\partial V = f(v)_{x=0},$$

$$\partial V = f_1(v)_{x=0} \,.\, \partial v_1,$$

$${}^2\partial V = f_2(v)_{x=0} \,.\, \partial^2 v + f_1(v)_{x=0} \,.\, {}^2\partial v,$$

$${}^3\partial V = f_3(v)_{x=0} \,.\, \partial^3 v + 3 f_2(v)_{x=0} \,.\, \partial u \partial v + f_1(v)_{x=0} \,.\, {}^3\partial v,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пошто пакъ у изводнимъ функціяма одъ v, кадъ место x метнемо 0, гдигодъ се появи v, остає само првый чланъ $a_0 = {}^0\partial v$ тога реда, то ћемо дакле по свему тому сачинителѣ вопроснога реда функціе V добыти, ако исту функцію као функцію одъ v (съ обзиромъ на то, да є v функція одъ x) застопце по x диференціалимо, у изводнимъ функціяма одъ $f(v)$ — диференціалнимъ количницима — место v узмемо само нѣговъ првый чланъ, и іощъ знакъ d изменимо са знакомъ ∂.

Н. п. имамо развити $V = v^m$, гди є $v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, у безкрайный редъ.

Ту є $${}^0\partial V = v^m,\ \partial V = m \cdot v^{m-1} \cdot \partial v,$$

$${}^2\partial V = m(m-1) \cdot v^{m-2} \cdot \partial^2 v\ m \cdot v^{m-1} \cdot {}^2\partial v,$$

$${}^3\partial V = m(m-1)(m-2) \cdot v^{m-3} \cdot {}^3\partial v + 3m(m-1) \cdot v^{m-2} \cdot \partial v \cdot {}^2\partial v + mv^{m-1} \cdot \partial v$$

. . . . . , т. є.

$${}^0\partial V = a_0^m,\ \partial V = m a_0^{m-1} \cdot a_1,\ {}^2\partial V = m^{2|-1} \cdot a_0^{m-2} \cdot a_1^2 + m a_0^{m-1} \cdot 2!\, a_2,$$

$${}^3\partial V = m^{3|-1} \cdot a_0^{m-3} \cdot a_1^3 + 3m^{2|-1} \cdot a_0^{m-2} \cdot a_1 \cdot 2!\, a_2 + m a_0^{m-1} \cdot 3! a_3,$$

. . . . . ;

дакле ако заменемо ове вредности у реду

$$V = {}^0\partial V + \partial V \cdot x + {}^2\partial V \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

слѣдує траженый редъ функціе

$$V = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)^m$$

$$= a_0^m + m a_0^m \cdot a_1 \cdot x + (m a_0^{m-1} \cdot a_2 + \frac{m}{2!}\, {}^{2|-1} \cdot a_0^{m-2} \cdot a_1^2)\, x^2$$

$$+ (m a_0^{m-1} \cdot a_3 + m^{2|-1} \cdot a_0^{m-2} \cdot a_1 a_2 + \frac{m^{3|-1}}{3!}\, a_0^{m-3} \cdot a_1^3)\, x^3 + \ldots,$$

а то є полиномный образацъ, каошто смо га нашли у I. Ч. на другій начинъ.

§ 184.

Ако є пакъ $V=f(u,v)$, и притомъ $u=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots$, а $v=\gamma_0+\gamma_1x+\gamma_2x^2+\ldots$, имамо

$$V={}^0\partial V+\partial V.x+{}^2\partial V.\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots,$$

а у име сачинителя ${}^0\partial V$, ∂V, ${}^2\partial V$, . . ., диференціалећи $V=f(u,v)$ застопце по u и v као функціе одъ x,

$${}^0dV=V=f(u,v)$$

$$dV=(V_1)_u.du+(V_1)_v.dv$$

$${}^2dV=(V_2)_u.d^2u+2(V_2)_{u,v}.dudv+(V_2)_v.d^2v$$
$$+(V_1)_u.{}^2du+(V_1)_v.{}^2dv$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

одкуда, ако метнемо 0 место x, слѣдуе

$${}^0\partial V=\underset{x=0}{V}=f(c_0,\gamma_0)$$

$$\partial V=(V_1)_u.\partial u+(V_1)_v.\partial v$$

$${}^2\partial V=(V_2)_u.\partial^2u+2(V_2)_{u,v}.\partial u\partial v+(V_2)_v.\partial^2v$$
$$+(V_1)_u.{}^2\partial u+(V_1)_v.{}^2\partial v$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

съ приметбомъ, да у изводнимъ функціяма V_1, V_2, . . ., гдигодъ стои просто u и просто v, треба узети или разумети само прве чланове тій редова, т. є. ${}^0\partial u$ и ${}^0\partial v$, изъ истогъ узрока као у прећашнѣмъ §-у.

Сачинитељ дакле вопроснога реда функције $V = f(u,v)$ добыт'ћемо, ако исту функцію по u и v (дакле посредно по x) застопце диференціалимо, у диференціалнимъ сачинительима место простога u и простога v узмемо само прве чланове ${}^0du$ и ${}^0dv$ тій редова, и іошъ знакъ d изменимо са знакомъ ∂.

§ 185.

У случаю ако є функція $V = f(u,v) = {}^0\partial V + \partial V \,.\, x + {}^2V \,.\, \frac{x^2}{2!} + \ldots.$ за сваку вредность броя x равна нулли, онда по § 9. I. Ч. мора быти и свакій иђнъ сачинитель ${}^0\partial V$, ∂V, ${}^2\partial V$, . . . за себе $= 0$, и єдначине одъ горньи израза, поставлђны $= 0$, показую зависность сачинителя ${}^0du$, du, ${}^2du$, ... одъ сачинителя ${}^0dv$, dv, ${}^2dv$, ... , или обратно, па дакле и начинъ како бы се добыли єдни изъ други у случаю, ако є редъ v као функція реда u, или овай као функція онога задатъ скривеномъ функціомъ $V = f(u,v) = 0$.

Слђдоватно, ако су у $V = f(u,v)$ редови u и v єданъ одъ другогъ зависни, и та є ньина зависность задата єдначиномъ $\varphi(u,v) = 0$, онда сачинителъи ${}^0\partial V$, ∂V, ${}^2\partial V$, ... реда V остаю каошто смо ій горе нашли, а сачинителъи ${}^0dv$, dv, ${}^2dv$, ... у ньима добыт'ће се изражени посредомъ сачинителя ${}^0du$, du, ${}^2du$, ... изъ постоећи збогъ $\varphi(u,v) = 0$ єдначина' ${}^0\partial\varphi(u,v) = 0$, $\partial\varphi(u,v) = 0$, ${}^2\partial\varphi(u,v) = 0$, ... , коихъ пакъ леве части налазимо по упутству § 184.

§ 186.

Ако є найпосле $V = f(u,v,w)$, т. є. функція три реда $u = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$, $v = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$, $w = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$, имамо

$$V = {}^0\partial V + \partial V . x + {}^2\partial V . \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots$$

$$dV = (V_1)_u . du + (V_1)_v . dv + (V_1)_w . dw ,$$

$${}^2dV = (V_2)_u . d^2u + (V_2)_v . d^2v + (V_2)_w . d^2w,$$
$$+ 2 (V_2)_{u,v} . dudv + 2 (V_2)_{u,w} . dudw + 2 (V_2)_{v,w} . dvdw$$
$$+ (V_1)_u . {}^2du + (V_1)_v . {}^2dv + (V_1)_w . {}^2dw ,$$

. . . . . ,

и одтудъ измеиомъ одъ x **са** 0 **,**

$${}^0\partial V = V = f(u, v, w)$$

$$\partial V = (V_1)_u \partial u + (V_1)_v . \partial v + (V_1)_w . \partial w$$

$${}^2\partial V = (V_2)_u . \partial^2 u + (V_2)_v . \partial^2 v + (V_2)_w . \partial^2 w + 2 (V_2)_{u,v} . \partial u \partial v$$
$$+ 2 (V_2)_{u,w} . \partial u \partial w + 2 (V_2)_{v,w} . \partial v \partial w$$
$$+ (V_1)_u . {}^2\partial u + (V_1)_v . {}^2\partial v + (V_1)_w . {}^2\partial w$$

. . . . . ,

гди у изводнимъ функціяма одъ V **место простога** u, v **и** w **треба свуда узети само прве чланове** ${}^0\partial u$, ${}^0\partial v$, ${}^0\partial w$ **тій редова.**

Осимъ начина за истраживанѣ сачинителя увиђа се іошъ лако

1.) да ако є у вопросномъ случаю $V = 0$, **мора быти такоћеръ и** ${}^0\partial V = 0$, $\partial V = 0$, ${}^2\partial V = 0$, . . . , **коє єдначине садрже међусобну зависность сачинителя редова** u, v **и** w **тако, да можемо оне ма коєга одъ тій редова изразити посредомъ сачинителя остала два реда, у случаю: ако бы онай єданъ редъ быо задатъ єдначиномъ** $V = 0$ **као скривена функція друга два реда. Исто тако**

2.) ако є осимъ $V = f(u, v, w) = 0$ іошъ и $W = \varphi(u, v, w) = 0$, мора быти ${}^0dV = 0$, $dV = 0$, ${}^2dV = 0$, ... и ${}^0dW = 0$, $dW = 0$, ${}^2dW = 0$, ..., тако, да по тима єдначинама можемо лако изразити сачинитељ ма коя два одъ редова u, v и w чрезъ сачинитељ трећега реда, у случаю: ако бы прва два реда были задати као скривене функціє трећега, єдначинама $V = 0$ и $W = 0$.

§ 187.

Редови u, v и w у вопросу предходећегъ §а могу быти ...

1.) међусобно сасвимъ независни, и у томе су случаю и сачинительи свакогъ одъ ньи независни одъ сачинителя остала два реда; или

2.) измећу редова u, v и w постои єдначина $\varphi(u, v, w) = 0$, и у томъ су случаю по првой приметби прећашнћга §а сачинительи єдногъ одъ ньи зависни одъ сачинителя друга два реда, посредомъ єдначина ${}^0d\varphi(u, v, w) = 0$, $d\varphi(u, v, w) = 0$, ${}^2d\varphi(u, v, w) = 0$, ... збогъ чега можемо изразити сачинителъ одъ V чрезъ сачинителъ само та два реда; или

3.) измећу редова u, v, и w постоє две єдначине $\varphi(u, v, w) = 0$ и $\psi(u, v, w) = 0$, у комъ случаю по 2. приметби истога §а зависе сачинительи два одъ тій редова одъ сачинителя оногъ трећегъ реда, посредомъ єдначина ${}^0d\varphi(u, v, w) = 0$, $d\varphi(u, v, x) = 0$, ${}^2d\varphi(u, v, w) = 0$, ..., и можемо дакле изразити сачинителъ одъ V чрезъ сачинителъ само тогъ трећегъ реда. Осимъ тога

4.) могу быти два одъ тій редова, н. п. v и w, или изводне функціє (диференціални количници), или интеграли оногъ трећега, и то по єдномъ или по више променльивы броєва r, s, t, ... У томе су случаю сачинительи она два прва реда исте изводне функціє или исти интеграли одъ сачинителя трећега реда, по онимъ истимъ променльивимъ броєвима r, s, t, ..., онако каошто показую дотични образци § 181. Найпосле

5.) у пређе споменутимъ случаєвима може быти V функція само два реда v и w, или башъ и само єднога w. Тадъ зависе она два реда или тай єданъ одъ трећегъ реда u, због чега се сачинительи одъ V могу сви изразити чрезъ сачинителѣ тога реда u.

§ 188.

Садъ смо у станю развити V као функцію одъ ма колико и каквы редова у редъ целы степена заєдничкогъ нѣиовогъ променльивогъ броя x, на слѣдующій начинъ:

Напишемо редъ

$$V = {}^{0}\partial V + \partial V . x + {}^{2}\partial V . \frac{x^2}{2!} + {}^{3}\partial V . \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots;$$

диференціалимо V као функцію дотичны редова застопце по x; у нађенимъ тимъ диференціалима изменюємо знакъ d знакомъ ∂, а одъ оны редова, гди се прости покажу, задржимо само нѣиове прве чланове, па онда заменемо све те изразе место сачинителя ${}^{0}\partial V$, ∂V, ${}^{2}\partial V$, ... у горнѣмъ реду за V.

И тай начинъ остає истый, были редови $u, v, w, \ldots$ у функціи V међу собомъ независни, или были єдни неке изводне функціє или интеграли одъ други, или была найпосле нека нѣиова међусобна зависность задата єдначинама $\varphi(u,v,w,\ldots) = 0$, $\psi(u,v,w,\ldots) = 0$, . . .

Примера ради узмимо да є $V = f\left(u, v, \int u dz, \frac{dv}{dz}\right)$. Заменююћи ради краткоће $\int u dz$ са s, а $\frac{dv}{dz}$ са t, имамо

${}^{0}\partial V = V$

$$\partial V = (V_1)_u . \partial u + (V_1)_v . \partial v + (V_1)_s . \partial s + (V_1)_t . \partial t$$

$${}^{2}\partial V = (V_2)_u . \partial^2 u + (V_2)_v . \partial^2 v + (V_2)_s \partial^2 s + (V_2)_t . \partial^2 t + 2(V_2)_{u,v} \partial u \partial v$$
$$+ 2(V_2)_{u,s} . \partial u \partial s + 2(V_2)_{u,t} . \partial u \partial t + 2(V_2)_{v,s} . \partial v \partial s$$

$$+2(V_2)_{v,t}.\partial v\partial t+2(V_2)_{s,t}.\partial s\partial t+(V_1)_u.{}^2\partial u$$
$$+(V_1)_v.{}^2\partial v+(V_1)_s.{}^2\partial s+(V_1)_t.{}^2\partial t$$
$$\cdots\cdots\cdots

$$^0\partial' V = V$$

$$\partial' V = (V_1)_{u'} \cdot \partial u' + (V_1)_{v'} \cdot \partial v' + \ldots$$

$$^2\partial' V = (V_2)_{u'} \cdot \partial^2 u' + (V_2)_{v'} \cdot \partial^2 v' + \ldots$$

$$+ 2\,(V_2)_{u',v'} \cdot \partial u' \cdot \partial v' + \ldots$$

$$+ (V_1)_{u'} \cdot {}^2\partial u' + (V_1)_{v'} \cdot {}^2\partial v' + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

гди како у V тако и у свима нѣговимъ изводнимъ функціяма место простога u', v', ... треба разумети само прве чланове $^0\partial u'$, $^0\partial v'$, ... тій редова.

Редъ дакле, добывеный после замене одъ u', v', .. съ редовима по x, представляюћи га са V', быт'ће

$$V' = {}^0\partial' V + \partial' V \cdot x + {}^2\partial' V \cdot \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial' V \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad (1.,$$

а траженый редъ треба да буде

$$V = {}^0\partial V + \partial V \cdot x + {}^2\partial V \cdot \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad (2.$$

Овай последньій редъ, каошто є лако увидити, да быт'ћемо изъ првога V', ако у томъ место u, v, ... гдигодъ стоє (было одкривено или скривено) узмемо ньиове редове по x, т. є.

$$u = {}^0\partial u + \partial u \cdot x + {}^2\partial u \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots,$$

$$v = {}^0\partial v + \partial v \cdot x + {}^2\partial v \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

и ако после V', у име сачинителя реда V, нієданпутъ, єданпутъ, двапутъ, ... застопце диференціалимо, па онда место x поставимо о.

Ради краткоће узмимо да є V осимъ одъ u', v', ... функція само іошъ одъ u и v. Бытће, поступаюћи каошто рекосмо,

$$^0\partial V = {}^0\partial' V = [V = f(u, v, u', v', \ldots] \quad \ldots (3.,$$

гди место u', v', ... треба разумети само њиове прве чланове $^0\partial u'$, $^0\partial v'$, а место u и v после такођеръ само прве чланове $^0\partial u$ и $^0\partial v$. Далѣ

$$\partial V = \partial' V + (V_1)_u \cdot \partial u + (V_1)_v \cdot \partial v \quad \ldots (4.,$$

гди съ $\partial' V$ представлямо последакъ одъ dV (т. є. одъ dV' после изменутога u и v съ њиовимъ редовима), по одлученомъ x, пошто смо место x узели 0; съ $(V_1)_u$ и $(V_1)_v$ пакъ означуємо послѣдке истога dV по ономъ x, коє се налази у сачинительима одъ V', такођеръ после изменутогъ x съ 0.

Узимаюћи одъ предстоеће едначине подъ 4.) лево и десно изводне функціе по x, и изменююћи после x съ 0, слѣдуе

$$^2\partial V = \partial(\partial' V) + \partial[(V_1)_u \cdot \partial u] + \partial[(V_1)_v \cdot \partial v] \quad \ldots (5.,$$

гди є изъ увиђавны узрока

$$\left.\begin{aligned} \partial[(V_1)_u \cdot \partial u] &= \partial(V_1)_u \cdot \partial u + (V_1)_u \cdot {}^2\partial u \\ \partial[(V_1)_v \cdot \partial v] &= \partial(V_1)_v \cdot \partial v + (V_1)_v \cdot {}^2\partial v \end{aligned}\right\} \quad \ldots (6.$$

Ставляюћи пакъ у истой єдначини подъ 4.) $\partial' V$ место V добыямо

$$\partial(\partial' V) = {}^2\partial' V + \frac{d(\partial' V)}{du} \cdot \partial u + \frac{d(\partial' V)}{dv} \cdot \partial v \quad \ldots (7.,$$

а ако опетъ тамо метнемо найпре $(V_1)_u$ а после $(V_1)_v$ место V,

$$\left.\begin{aligned} \partial(V_1)_u &= \partial'(V_1)_u + (V_2)_u \cdot \partial u + (V_2)_{u,v} \cdot \partial v \\ \partial(V_1)_v &= \partial'(V_1)_u + (V_2)_{u,v} \cdot \partial u + (V_2)_v \cdot \partial v \end{aligned}\right\} \quad \ldots (8.,$$

гди є по § 181.

$$\partial'(V_1)_u = \frac{d(\partial' V)}{du}, \quad \text{а} \quad \partial'(V_1)_v = \frac{d(\partial' V)}{dv} \quad \ldots \quad (9.$$

Због свега тога є дакле, ако ове вредности єдну у другой, и све у єдначини 5. заменемо,

$$\left.\begin{aligned} {}^2\partial V = {}^2\partial' V + 2\frac{d(\partial' V)}{du}\cdot\partial u + 2\frac{d(\partial' V)}{dv}\cdot\partial v \\ + (V_1)_u\cdot{}^2\partial u + (V_1)_v\cdot{}^2\partial v + (V_2)_u\cdot\partial^2 u \\ + 2(V_2)_{u,v}\cdot\partial u\partial v + (V_2)_v\cdot\partial^2 v \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10.$$

На истый начинъ можемо изъ овогъ израза извести ${}^3\partial V$, одтудъ опетъ ${}^4\partial V$, и т. д. Само се притомъ несме заборавити, да у свима изразима одъ 3. до 10. место свакогъ простогъ u', v', ..., гдигодъ се у сачинительима находе, ваља узети само прве чланове ${}^0\partial u'$, ${}^0\partial v'$, ... уведены за u', v', ... редова, каогодъ што се после опетъ место свакогъ простогъ u и v има метнути ${}^0\partial$ и ${}^0\partial v$.

Ово решенѣ можемо употребити и у случаю, гди су $\partial' V$, ${}^2\partial' V$, ... функціе само одъ u и v, или осимъ u и v іошъ и одъ произвольно колико више редова w, y, ...

§ 191.

Друго решенѣ. Пре и лакше можемо изнаћи чинителѣ реда V изъ сачинителя реда V' (єдначине подъ 2. и 1.) на тай начинъ, да у овима помислимо место u и v поставлѣне ньиове редове; што є тиме постало развієно є у редове по x, и све є найпосле уређено по степенима одъ x.

Пошто су сачинители ${}^0\partial' V$, $\partial' V$, ... функціе одъ u и v, слѣдує, да ако се у тима сачинительима место u и v поставе ньиови редови, свакій одъ ньи прелази

за себе у редъ степена одъ x, коій уобште представлямо чрезъ

$$^{0}\partial_1(^{n}\partial' V) + \partial_1(^{n}\partial' V) . x + ^{2}\partial_1(^{n}\partial' V) . \frac{x^2}{2!} + \ldots ;$$

сачинитељ пакъ свакогъ таквогъ реда добыт'ћемо по § 183. изменююћи тамошнѣ ∂ са саданьимъ ∂_1, а тамошнѣ V са овдашнѣимъ $^{n}\partial' V$.

На основу ове приметбе можемо садъ настовће друго решенѣ сасвимъ уобште изложити овако:

Представляюћи редъ V' (єдначину прећашнѣгъ §а подъ 1.) символомъ

$$V' = S\left[^{\alpha}\partial' V . \frac{x^{\alpha}}{\alpha!}\right] \quad \ldots\ldots \quad (3.',$$

(кои значи: V' є сбиръ чланова вида $^{\alpha}\partial' V . \frac{x^{\alpha}}{\alpha!}$,) можемо одма ређи, да є

$$V = S\left[^{a}\partial_1(^{\alpha}\partial' V) . \frac{x^{a}}{a!} . \frac{x^{\alpha}}{\alpha!}\right] \quad \ldots\ldots \quad (4.',$$

у комъ изразу, да бы добыли V, треба метнути найпре место α по реду све целе положне броєве 0, 1, 2, ... у ∞, па онда валя све тако добывене чланове (кои ће быти безбройно пута безбройно) у єданъ сабрати.

Ставляюћи $a + \alpha = \varepsilon$, прелази ова єдначина подъ 4.', због $\frac{\varepsilon!}{a!\,\alpha!} = \frac{(a+\alpha)}{a!\,\alpha!} = \binom{a+\alpha}{a} = \binom{a+\alpha}{\alpha} = \binom{\varepsilon}{a} = \binom{\varepsilon}{\alpha}$, у слѣдуюћу

$$V = S\left[\binom{\varepsilon}{a} . {}^{a}\partial_1(^{\alpha}\partial' V) . \frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon!}\right] \quad \ldots\ldots \quad (5.',$$

по коіой дакле за V треба метнути место ε по реду све броєве 0, 1, 2, ... у ∞, и уза свако ε за a и α опетъ оне целе положне броєве одъ 0 до ∞, кои є сбиръ $a + \alpha = \varepsilon$, па онда све тако добывене вредности валя іошъ скупити у сбиръ S.

Сравненѣ ове єдначине 4.′, съ ономъ подъ 2.) у прећашнѣмъ §у, коя по овде уведеномъ начину писана овако изгледа

$$V = S\left[{}^{\varepsilon}\partial V \,.\, \frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon!}\right],$$

показуе, да њиови поєдини, са x^{ε} снабдевени чланови мораю быти єднаки, дакле да мора быти

$${}^{n}\partial V = S\left[\binom{n}{a} \,.\, {}^{a}\partial_1({}^{\alpha}\partial' V\right] \ldots . \quad (6.',$$

гди a и α примаю све целе положне бройне вредности 0, 1, 2, ... до ∞, коихъ є сбиръ $= n$, а $\binom{n}{a}$ представля комбинаторный брой $\frac{n^{a|-1}}{a!}$, — и гди найпосле знакъ S налаже, да се све тако добывени изрази саберу у єданъ. . . . . .

Ставляюћи дакле ту место n по реду бровве 0, 1, 2, ... , добыямо

$${}^{0}\partial V = {}^{0}\partial_1({}^{0}\partial' V) = V_{x=0},$$

$$\partial V = {}^{0}\partial_1(\partial' V) + \partial_1({}^{0}\partial' V) = {}^{0}\partial V + \partial_1(\partial' V),$$

$${}^{2}\partial V = {}^{0}\partial_1({}^{2}\partial' V) + 2\partial_1(\partial' V) + {}^{2}\partial_1({}^{0}\partial' V),$$

. . . . . ,

кои се изрази подпуно слажу съ онима у предходећемъ §у, чимъ истражимо вредности чланова у десной части по § 183., изменююћи тамо ∂ лево съ ∂_1, а V десно по реду съ ${}^{0}\partial' V$, $\partial' V$, ${}^{2}\partial' V$, ...

§ 192.

Као особитый, за употреблѣнѣ важный случай обясњеногъ у § 190. обштегъ задатка преображаваня у редове,

споминѣмо само іошъ тай, гди су ${}^0du'$ ${}^0dv'$, ... du', dv', .. ${}^2du'$, ${}^2dv'$, ..., функціє само одъ u, коій редъ иначе у V, па дакле и у ${}^0d'V$, $d'V$, ${}^2d'V$, ... може налазити се или неналазити, и гди є найпосле место свакогъ простогъ u узеть редъ $${}^0du + du \,.\, x + {}^2du \,.\, \frac{x^2}{2!} + \ldots.$$

У томъ є случаю (види изразе §а 190.)

1.) $${}^0dV = {}^0d'V = [V = f(u, u', v', \ldots)]$$

2.) $$dV = d'V + (V_1)_u \,.\, du,$$ и притомъ

$$d'V = dV - (V_1)_u \,.\, du,$$

3.) $${}^2dV = {}^2d'V + 2\,\frac{d\,(d'V)}{du} \,.\, du + (V_2)_u \,.\, d^2u + (V_1)_u \,{}^2du,$$

. . . . . ,

гди подъ свакимъ u', v', ... треба разумети само ${}^0du'$, ${}^0dv'$, ... , и у тима опетъ подъ u само ${}^0du$.

Завршујући съ овимъ предстоећій предметъ, морамо іошъ приметити, да при употребљяваню докученя предходећи §§-а, у свакомъ особитомъ случаю, гди бы редъ V съ некимъ чланомъ прекинули, изъ узрока што є тай редъ свуда добывенъ на основу Маклореновогъ образца, іошъ и границе, међу коима леже пренебрегнути чланови, по § 138. узети треба.

Б. Варіяціовый рачунъ.

§ 193.

Ако є у докученяма пређашньи §§-а при нарочномъ ньиовомъ употребљяваню брой x изчезльиво малый, онда є разлика између редова u, v, V, ... и ньиовы првы чланова такођеръ изчезльиво мала, и тада зову се чланови тій разлика $u - {}^0du$, $v - {}^0dv$, $V - {}^0dV$, ... (кои су

сви снабдевени съ некимъ степеномъ одъ x, и одъ коихъ є свакій спрамъ предходећему опетъ изчезльиво малый), пошто се помложе по реду съ $1!, 2!, 3!, \ldots$ — **варіяціе** или **премене** одъ $u, v, V, \ldots$

Предходећи §§§и дакле, поредъ решеня задатка коій имъ є быо цѣль, садрже увдно и **варіяціоный рачунъ** по нѣговой сущтини; но у слѣдующему упознат'ћемо се іошъ и съ нѣговимъ обичнимъ видомъ.

§ 194.

Ако u, или v, или $V, \ldots$ по себи, или зависно, прелази у редъ целы степена одъ x, коій представлямо односно са

$$^0\partial u + \partial u \,.\, x + {}^2\partial u \,.\, \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial u \,.\, \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

$$^0\partial v + \partial v \,.\, x + {}^2\partial v \,.\, \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial v \,.\, \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

$$^0\partial V + \partial V \,.\, x + {}^2\partial V \,.\, \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V \,.\, \frac{x^2}{3!} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

и ако є (или се помисли) **притомъ** x **изчезльиво мало**, тако дакле, да се $^0\partial u, {}^0\partial v, {}^0\partial V, \ldots$ односно одъ $u, v, V, \ldots\ldots$, неразликую: онда се производи $^n\partial u \,.\, x^n, {}^n\partial v \,.\, x^n, {}^n\partial V \,.\, x^n, \ldots\ldots$ зову n. **варіяціе** или **премене**, односно одъ $u, v, V, \ldots$, и означую се простіе са $^n\delta u, {}^n\delta v, {}^n\delta V, \ldots$; разлика пакъ $u - {}^0\delta u$, или $v - {}^0\delta v$, или $V - {}^0\delta V, \ldots\ldots$ назива се **цела или скупна варіяція** одъ u, или $V, \ldots\ldots$

§ 195.

Изъ огъ понятія варіяціе слѣдує обзиромъ на § 181. съ места, да є

I.) $x \,.\, \partial V = \delta V$, а уобште $x \,.\, {}^{n}\partial V = {}^{n}\delta V$,

II.) $V = {}^{0}\delta V + \delta V + \frac{1}{2!}\,{}^{2}\delta V + \frac{1}{3!}\cdot{}^{3}\delta V + \ldots\ldots$

III.) ${}^{n}\delta\,(V_n)_t = \frac{{}^{n}d\,({}^{m}\delta V)}{d^n t}$, ${}^{r}\delta\,(V_{m+n})_{my,nz} = \frac{{}^{m+n}d\,({}^{r}\delta V)}{d^n y \,.\, d^n z}$,

IV.) $\delta \int_a^b V dz = \int_a^b \delta V \,.\, dz$, и т. д.,

тако дакле, да послѣдке §§а 182. до 192. валя само помножити съ x, x^2, x^3, . . . и тамошньій знакъ ∂ заменути са δ, да бы добыли дотичне изразе варіяція, и да тамо докучена практична правила за истраживанѣ сачинителя постоє сасвимъ онако и за опредељиванѣ варіяція δV, ${}^{2}\delta V$, ...

Притомъ валя іошъ приметити, да є ясніє и удобніє оставити варіяціє одъ u или V у виду ${}^{n}\partial u \,.\, x^n$ или ${}^{n}\partial V \,.\, x^n$, место што ій означуємо са ${}^{n}\delta u$ и ${}^{n}\delta V$, и то зато, што се **крайни** изрази ${}^{n}\partial u$ и ${}^{n}\partial V$ онако неспояваю са изчезльиво малимъ броємъ x, него одма падаю у очи као крайни сачинительи тогъ изчезльивогъ броя.

Придржаваюћи се ове приметбе можемо броєве ${}^{n}\partial u$ и ${}^{n}\partial V$ назвати **варіяціонимъ сачинительима** (подобно диференціалнимъ сачинительима), и показаный подъ *A*.) општій начинъ развіяпя у редове заслужує тадъ съ пунимъ правомъ име варіяціонога рачуна.

§ 496.

Примеръ. Нека є $U = f(u, v, w, x, y, z)$, и притомъ $v = \varphi(u)$, $w = \psi(u)$, $x = \frac{dv}{du}$, $y = \frac{{}^{2}dv}{d^2 u}$, а $z = \frac{dw}{du}$.

Осимъ тога нека є іошъ $V = \int_a^b U du$.

Ако у томъ случаю прелазе v и w у редове $v+\delta v+\frac{1}{2!}.{}^2\delta v+\frac{1}{3!}.{}^3\delta v+\ldots$ и $w+{}^0\delta w+\frac{1}{2!}.{}^2\delta w+\frac{1}{3!}.{}^3\delta w+\ldots\ldots$, онда прелази и V у безкрайный редъ, кои ћемо представити са

$$V+\delta V+\frac{1}{2!}{}^2\delta V+\frac{1}{3!}{}^3\delta V+\ldots,$$

па ако треба да се изрази и δV варіяціяма δv, δw, ${}^2\delta v$, ${}^2\delta w$, . . . , онда ће быти

1.) $\delta V=\int_a^b \delta U\,.\,du$, а

2.) $\delta U=(U_1)_v.\delta v+(U_1)_w.\delta w+(U_1)_x.\delta x+(U_1)_y.\delta y+(U_1)_z.\delta z$,

при чему є

$$\delta x=\delta(v_1)_u=\frac{d\,.\,\delta u}{du},\ \delta y=\delta(v_2)_u=\frac{{}^2d\,.\,\delta u}{d^2u},\ \text{а}\ \delta z=\delta(w_1)=\frac{{}^2d.\delta w}{d^2u},$$

и зато ако ове вредности заменемо у предходећой єдначини подъ 2.), и после узмемо то δU у прву єдначину,

$$3.)\ \delta V=\int_a^b\Big[(U_1)_v.\delta v+(U_1)_w.\delta w+(U_1)_x.\Big(\frac{d\,.\,\delta u}{du}\Big)+$$
$$+(U_1)_y.\Big(\frac{{}^2d.\delta v}{d^2u}\Big)+(U_1)_z.\Big(\frac{d\,.\,\delta w}{du}\Big).du$$

и тай се интегралъ има узети по свему u, кое се налази у заграђеномъ чинителю одкривено или скривено.

Осимъ тога іошъ валя приметити, да се притомъ варіяціе одъ v и w сматраю као познате, и да по томе єдначина 3.) показуе само зависностъ варіяціе δV одъ тій варіяція δv и δw.

Найпосле како бы се добыле и друге варіяціе одъ V изражене варіяціяма δv и δw, кадъ бы тако быле одъ потребе, разуме се сада већъ ямачно безъ нарочнога казиваня, каогодъ и да се изразъ за δV може по потреби разно преображавати.

В. Најобштія теорія о максимуму и минимуму.

§ 197.

Ако є V функція произвольны променљиваца, коя или садржи или несадржи и диференціалны количника или интегр. кои одъ тій броєва, была она иначе познатогъ или іошъ непознатогъ вида; и ако далѣ V_x преставля исту, на произвольный, али свагда познатый начинъ **променљивану** (варирану) функцію, т. є. оно у шта се претвара V, ако место єдногъ или место више одъ оны променљивы броєва, или најпосле место свію ньи узмемо безкрајне редове, одъ кои свакій започинѣ съ дотичнимъ променљивцемъ: онда намъ дає V_x са єданпутъ положнимъ, а другипутъ одречнимъ x, две оближнѣ вредности одъ V, коє представлямо обе редомъ

$$V_x = V + \partial V . x + {}^2\partial V . \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V . \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

Садъ да извидимо, подъ коимъ ће условама быти функція V у односу на те нѣне оближнѣ вредности **максимумъ**, а подъ коима **минимумъ**, рећи ће одъ обе те вредности већа, или одъ обе маня.

§ 198.

Да ли є функція V већа или є маня одъ нѣны оближньи вредностій V_x, показує разлика $V_x - V$. Како є пакъ та разлика

$$V_x - V = \partial V . x + {}^2\partial V . \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V . \frac{x^3}{3!} + \ldots ,$$

при предпостави, да є x изчезльиво малый брой, због $\partial V . x >$ одъ сбира свію осталы нѣны чланова, при положномъ x положна, а при одречномъ x одречна, дакле

оближнѣ вредности функціе V противнога знака, то иста функція V неможе быти ни одъ обе маня ни одъ обе већа, докле годъ ніе $dV.x = 0$, т. е. $dV = 0$, и по томе е

$$1.) \quad dV = 0$$

една услова, да бы функція V могла быти максимумъ или минимумъ.

Да ли є пакъ функція V поредъ те услове уобште максимумъ или минимумъ и понаособъ шта, зависи после очевидно одъ другогъ члана $^2dV.\frac{x^2}{2!}$, као тада највећега, и зато у обзиру знака разлике $V - V$ решаваюћега. Но $\frac{x^2}{2!}$ є, было x положно или одречно, свагда положанъ брой, и зато знакъ разлике $V - V$ зависи тада само одъ знака ^2dV.

Ако є дакле поредъ горнѣ услове ^2dV за нађене вредиости изъ єдначине $dV = 0$ **положанъ**, онда є функція V одъ обе оближнѣ вредности V маня, дакле **минимумъ**, а ако є напротивъ ^2dV **одречанъ**, онда є функція V одъ обе оближнѣ вредности V **већа**, дакле **максимумъ.**

Покаже ли се поредъ $dV = 0$, са одтудъ нађенимъ вредностима, іошъ и $^2dV = 0$, онда V, изъ исты узрока као прѣже, опетъ неможе быти ни максимумъ ни минимумъ, доклегодъ ніе съ онимъ истимъ вредностима уєдно и ^3dV, и тадъ поредъ тога решава ^4dV на истый начинъ као пре ^2dV, да ли є V при коіой одъ оны вредностій максимумъ или минимумъ, или ніе.

И т. д., и т. д.

§ 199.

Пошто є пакъ редъ $V - V = dV.x + {}^2dV.\frac{x^2}{2!} + \ldots$ добывенъ помоћу маклореновогъ образца, то є могуће,

да функція V бащъ за оне вредности пременльивы нѣны броєва постає максимумъ или минимумъ, при коима онай образацъ више непостои зато, што съ њима или dV, или ^2dV, или ^3dV, ... постаю вида $\frac{1}{0}$.

Непостане ли дакле притомъ већъ $dV = \frac{1}{0}$, онда є іошъ єднако

$$V - {}_xV = dV.x + \ldots\ldots,$$

и зато іошъ єднако $dV = 0$ услова за максимумъ или минимумъ.

Но како є могуће, да вредности пременльивы броєва, коє преводе V у максимумъ или минимумъ, башъ онима принадлеже, коє већъ dV показую у виду $\frac{1}{0}$, то є, да ій небы промашили, нуждно, поставити іошъ

2.) и $dV = \frac{1}{0}$, т. є. $\frac{1}{dV} = 0$,

и изнаћи іошъ и одтудъ вредности пременльивы броєва; но за те морамо тадъ (зато што маклореновъ образацъ, па дакле и горньій редъ разлике ${}_xV - V$ издає) разлику ${}_xV - V$ претворити другимъ (изъ I. кнь. познатимъ простимъ) путемъ у редъ, да бы могли извидити, меня ли она поредице съ x свой знакъ за нађене вредности пременльиваца, или га неменя. У првомъ случаю функція V за исте вредности ніє ни максимумъ ни минимумъ; у другомъ пакъ случаю быт'ће V максимумъ, ако разлика ${}_xV - V$ остає при оба x (и положномъ и одречномъ) одречна, а минимумъ, ако є иста разлика при оба x положна.

§ 200.

Каошто видимо ово є истраживанѣ подобно показаномъ у I. кньизи. Сва є разлика само у томе, што овде

вопросну функцію V по x пременюємо, а тамо диференціалимо, и што смо іой овде дали сасвимъ неограниченый смисао. Извести пакъ изъ предходећегъ сматраня начинъ, по комъ валя практично поступати при истраживаню максимума и минимума, излишно є по томе, што се по себи увиђа. Приметит'ћемо само іошъ, да при томъ истраживаню найтежій посао задае далѣ поступанѣ са єдначиномъ $dV=0$ ради нѣнога решеня; због чега, колико да бы ясніе увидили ту тешкоћу, толико и да бы се научили уклаяти ю, сматрат'ћемо іошъ слѣдующе особите случаєве.

§ 201.

1.) Ако є $V=f(u)$ и притомъ $u=r+x$, онда є

$$dV=f_1(u)\,.\,du=f_1(u),$$

єръ є $du_x=d(r+x)_x=1$, и зато $du=1$, а $^2du=^3du=\ldots=0$.

У томъ дакле случаю прелази $dV=0$ у $V_1=0$, а то є задатакъ §§ 62.—64., кога се решенѣ, каошто видимо, съ овимъ овде подпуно слаже.

2.) Ако є $V=f(u,v)$, онда є

$$dV=(V_1)_u\,.\,du+(V_1)_v\,.\,dv.$$

Садъ ако су притомъ u и v међусобно независни броєви, онда и du и dv єданъ одъ другогъ независе, и єдначина $dV=0$ дели се на друге две

$$(V_1)_u=0 \quad \text{и} \quad (V_1)_v=0$$

по томе, што постои како при $du=0$ и свакомъ dv, тако и при $dv=0$ и свакомъ du.

И тако се ово подпуно слаже съ онимъ, што смо дознали на другій начинъ у § 70.

Зависе ли пакъ броєви u и v єданъ одъ другога посредомъ єдначине $\varphi(u, v) = 0$, онда є и $d\varphi(u, v) = 0$, т. е. и

$$\varphi_1(u, v)_u \cdot du + \varphi_1(u, v)_v \cdot dv = 0,$$

коя єдначина садржи зависность између du и dv.

Истреблююћи dv изъ ове єдначине и оне $dV = (V_1)_u \cdot du + (V_1)_v \cdot dv = 0$, добыямо нову

$$(V_1)_u \cdot \varphi_1(u, v)_v - (V_1)_v \cdot \varphi_1(u, v)_u = 0,$$

коя у спрези са $\varphi(u, v) = 0$ дає оне вредности одъ u и v, по коима у вопросномъ случаю функція V може быти максимумъ или минимумъ. Дали є пакъ V съ ньима доиста єдно или друго, и коє? показаћe своимъ знакомъ разлика $\underset{x}{V} - V$, чимъ се у ньой поставе наћене спреге одъ u и v. —

Међусобна зависность броєва u и v може быти дата такођеръ и таковомъ єдначиномъ $\varphi(u, v) = \alpha$, коя показує, да є $\varphi(u, v)$ при свима спрегама броєва u и v равна истомъ некомъ **сталномъ** брою α.

У томъ є случаю $\underset{x}{\varphi}(u, v) - \varphi(u, v) = 0$, и зато іошћ єднако $d\varphi(u, v) \cdot x + \ldots = 0$, т. є. $d\varphi(u, v) = 0$ каогодъ у првомъ случаю овога §а; због чега оно цепанћ єдначине $dV = 0$ на $(V_1)_u = 0$ и $(V_1)_v = 0$ постои каогодъ тамо.

§ 202.

Ако є $V = f(u, v, z)$ и притомъ $z = \frac{dv}{du}$; и ако $\underset{x}{V}$ постає одтудъ изменьиванћмъ броя v съ подпуномъ нћговомъ пременомъ по x, т. є. редомъ $v + dv \cdot x + \frac{^2dv}{2!} \cdot x^2 + \ldots$, због чега тадъ и место количника $\frac{dv}{du} = (v_1)_u$ морамо узети редъ $(v_1)_u + \frac{d \cdot dv}{du} \cdot x + \frac{^2d \cdot dv}{d^2u} \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots$: онда имамо

$$dV = (V_1)_v \cdot dv + (V_1)_z \cdot \frac{d dv}{du} \quad \ldots\ldots \text{(1.}$$

Садъ ако ће єдначина $dV = 0$ да постои за сваку произвольну функцію одъ u, коя бы се узела место dv, онда цепа се $dV = 0$ опетъ на друге две єдначине

$$2.)\quad (V_1)_v = 0 \quad \text{и} \quad (V_1)_z = 0$$

по томе, што dv може садржати какавъ сталный брой, коій се у $\frac{d \cdot dv}{du}$ више неће находити, и што дакле вредности одъ dv и $\frac{d \cdot dv}{du}$ остаю међу собомъ независне тако, да поредъ произвольногъ dv постои $\frac{d \cdot dv}{du} = 0$, и узъ произвольногъ $\frac{d \cdot dv}{du}$ опетъ $dv = 0$.

Ако ће пакъ єдначина $dV = 0$ да непостои при свакомъ dv, т. є. да функція V небуде максимумъ или минимумъ спрамъ сваке V_x, него само спрамъ оне, коя за сваку другу вредность одъ u постає друга, но така, да є

$$\text{или само } dv = 0, \quad \text{а не и } \frac{d \cdot dv}{du} = 0,$$

$$\text{или само } \frac{d \cdot dv}{dv} = 0, \quad \text{а не и } dv = 0:$$

онда єдначина $dV = 0$ прелази у првомъ случаю у

$$3.)\quad (V_1)_z = 0,$$

а у другомъ случаю у

$$4.)\quad (V_1)_v = 0.$$

§ 203.

Ако є $V = \int_a^b U du$, и притомъ U нека одъ оны у предходећемъ §у изброєны функція; и єсу ли далѣ ближнѣ вредности одъ V_1, спрамъ коихъ оно треба да буде максимумъ или минимумъ, овакове:

$$V_x = \int_a^b U_x \cdot du,$$

гди $\overset{x}{U}$ представля оно што одъ функціе U быва, ако у њой место $v, z, \ldots$ узмемо њиове премене по x, т. є. $v + \partial v \,.\, x + {}^2\partial v \,.\, \frac{x^2}{2!} + \ldots$, и т. д., — онда налазимо

$$\partial V = \int_a^b \partial U \,.\, du$$

одъ прилике на онакавъ начинъ као у примеру § 196.

За болѣ обясненѣ овога и што ћемо іошъ рећи, задржимо функцію U као у споменутомъ примеру, т. є. нека є функція $U = f(u, v, w, r, s, t)$, а притомъ $v = \varphi(u)$, $w = \psi(u)$, $r = \frac{dv}{du}$, $s = \frac{{}^2dv}{d^2u}$, $t = \frac{dv}{du}$. Быт'ће

$$\partial V = \int_a^b \Big[(U_1)_v \,.\, \partial v + (U_1)_w \,.\, \partial w + (U_1)_r \cdot \Big(\frac{d\,\partial v}{du}\Big) + (U_1)_s \cdot \Big(\frac{{}^2d \,.\, \partial v}{d^2u}\Big) + (U_1)_t \cdot \Big(\frac{d\partial w}{du}\Big)\Big] \,.\, du.$$

Да бы могли єдначину $\partial V = 0$ далѣ израђивати и разрешити, морамо найпре нѣнъ интегралъ почастнимъ интеграленѣмъ дотле преображавати, докъ неостану подъ интегралнимъ знакомъ само чланови съ простимъ ∂v, ∂w, $\ldots$, а нієданъ више са $\frac{d \,.\, \partial v}{du}$, $\frac{{}^2d\partial v}{d^2u}$, $\frac{d\partial w}{du}$, $\ldots$.

Тако поступаюћи добыямо

$$\partial V = \Big\{\Big[(U_1)_r - \frac{d(U_1)_s}{du}\Big] \,.\, \partial v + (U_1)_s \cdot \Big(\frac{d\partial v}{du}\Big) + (U_1)_t \cdot \Big(\frac{d\partial w}{du}\Big)\Big\}_a^b$$

$$+ \int_a^b \Big\{\Big[(U_1)_v - \frac{d(U_1)_r}{du} + \frac{{}^2d\,(U_1)_s}{d^2u}\Big] \,.\, \partial v$$

$$+ \Big[(U_1)_w - \frac{d(U_1)_t}{du}\Big]\, \partial w\Big\}\, du\,,$$

и текъ сада можемо рећи, да єдначина $\partial V = 0$, коя за максимумъ и минимумъ треба да постои, уобште неможе постояти, ако ніє свакій одъ нћна два члана за себе $= 0$, по томе, што првый чланъ несадржи више u (єръ се место u већъ узело a и b), а у другомъ члану тога броя іошъ има.

Єдначина $\partial V = 0$ дакле дели се на друге две, одъ коихъ се свака опетъ, по особитимъ околностима сваког особитогъ задатка, наново цепа и далѣ.

Одъ другогъ члана добыяю се диференціалне єдначине, ков се іопъ мораю интегралити. Те се єдначине зову **обште єдначине** максимума и минимума.

Єдначине пакъ одъ првогъ члана зову се **граничне єдначине**, и служе узъ друге услове задатка за нзтраживанѣ сталны броєва, кои се увлаче интеграленѣмъ оны првы.

§ 204.

За болѣ увиђанѣ овы потврђеня о єдначини $\partial V = 0$ у вопросномъ случаю, узмимо єданъ примеръ. *)

Нека є функція

$$V = \int_a^b U du = \int_a^b du \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2} = \int_a^b du \cdot \sqrt{1 + (v_1)_u^2}\,.$$

Ту є $U = \sqrt{1+(v_1)_u^2}$, дакле $\partial U = \dfrac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}} \cdot \left(\dfrac{d\partial v}{du}\right)$,

и зато

$$\partial V = \int_a^b \partial U \,.\, du\,,$$

или ако почастно интегралимо по образцу $\int y dz = yz - \int z dy$, ставляюћи у истоме $y = \dfrac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}}$ а $dz = \left(\dfrac{d\partial v}{du}\right) du = d\partial v$,

---

*) Примера за само истраживанѣ максимума и минимума како за предстоећій случай, тако и за последныій у § 202. и оне што ћемо іошъ споменути у слѣдующимъ §§ма, имат'ћемо доціе у аналитичной геометріи.

$$\partial V = \left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}} \cdot \partial v\right]_a^b - \int_a^b y_1 \cdot \partial v \cdot du$$

$$= \left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}} \cdot \partial v\right]_{u=b} - \left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}} \cdot \partial v\right]_{u=a} - \int_a^b y_1 \partial v \cdot du,$$

при чему є $y_1 = \frac{dy}{du}$.

Єдначина одъ прва два одкривена члана дає због независногъ dv **съ** $u = b$ **одъ** dv **съ** $u = a$ **граничне єдначине**

$$\left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}}\right]_{u=b} = 0 \quad \text{и} \quad \left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}}\right]_{u=a} = 0,$$

а обе ове

$$(v_1)_u = 0.$$

Другій пакъ чланъ дає обшту єдначину максимума и минимума

$$d\left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}}\right] = 0, \quad \text{дакле ако интегралимо}$$

$$\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}} = \text{сталномъ некомъ брою } c.$$

Како пакъ овай количникъ неможе быти иначе сталанъ, него само ако му є и броитель и именитель сталанъ, то слѣдує

$$(v_1)_u = \frac{dv}{du} = C, \quad \text{дакле}$$

$$dv = Cdu,$$

а ако ову єдначину интегралимо

$$v = Cu + \mathfrak{C}.$$

Но прѣже нађосмо да є $(v_1)_u = 0$. **Слѣдує дакле** $C = 0$, **и зато**

$$v = \mathfrak{C}.$$

§ 205.

Ако є пакъ функція V као у § 203., т. є. $V = \int_a^b U du$, али притомъ нѣне оближнѣ вредности, спрамъ коихъ она треба да буде максимумъ или минимумъ, овакове

$$\underset{x}{V} = \int_{\underset{x}{a}}^{\underset{x}{b}} \underset{x}{U} du,$$

онда по приметби § 182. састои се ∂V осимъ чланова каошто смо ій видили у горе споменутомъ §у, іошъ и изъ чланова

$$\underset{u=b}{U} . \partial b - \underset{u=a}{U} . \partial a.$$

Пошто пакъ ови чланови принадлеже онимъ одкривенима, т. є. онима изванъ интегралнога знака; то остає обшта єдначина одъ $\partial V = 0$ сасвимъ онако као у § 203., напротивъ гранична єдначина садржат'ће іошъ чланове $\underset{u=b}{U} . \partial b - \underset{u=a}{U} . \partial a$.

§ 206.

Найпосле ако функція U садржи u, v и w, и іошъ диференціалны количника одъ v и w по u, произвольно до кога реда, па є опетъ

$$V = \int_a^b U du, \quad \text{а} \quad \underset{x}{V} = \int_a^b \underset{x}{U} du,$$

и притомъ v и w єдно одъ другога зависно по диференціалной єдначини

$$W = \varphi\,[u, v, w, (v_1)_u, (w_1)_u, (v_2)_u, (w_2)_u, \ldots] = 0:$$

онда є пре свега

1.) $$\partial V = \int_a^b \left[(U_1)_v . \partial v + (U_1)_w . \partial w + (U_1)_{v_1} . \left(\frac{d\partial v}{du}\right) \right.$$

$$\left. + (U_1)_{w_1} . \left(\frac{d\partial w}{du}\right) + (U_1)_{v_1} . \left(\frac{d^2\partial v}{d^2 u}\right) + \ldots\ldots \right] . du$$ + алгебрайскій сбиръ ослобођены одъ интегралногъ знака чланова.

И садъ треба изъ єдначине $\partial V = 0$, пошто због $W = 0$ w одъ v (или обратно), па дакле и dw одъ dv зависи, да истребимо dw, да бы добыли ону єдначину, коя се текъ, поводомъ произвольнога dv на друге цепа.

У име тога имамо изъ $W = 0$ єдначину

$$(W_1)_u . dv + (W_1)_w . dw + (W_1)_{v_1} . \left(\frac{d\partial v}{du}\right) + \ldots\ldots = 0,$$

морамо пакъ за удействованѣ истребльиваня употребити такозваный **начинъ множителя**, коій ніє никакавъ другій но познатый изъ алгебре Безуовъ начинъ, съ изменама коє ћемо одма видити.

Мложимо найпре єдначину

$$2.) \quad W = 0$$

съ некомъ іошъ непознатомъ функціомъ r одъ u, додаємо rW, коє є $= 0$, функціи U, те образуємо $U + rW$, и поставлямо после овай сбиръ место U у изрразу за ∂V тако да имамо

$$\partial V = \int_a^b (\partial U + r . \partial W) . du.$$

Затимъ определюємо функцію r тако, да у ∂V сачинитель одъ dw буде $= 0$, дакле изъ єдначине

$$3.) \quad \frac{d(U + rW)}{dw} - \frac{d\left[\frac{d(U + rW)}{dw_1}\right]}{du} + \ldots\ldots = 0.$$

Ова є єдначина у обзиру на r диференціална, коя, кадъ бы v и w были познати броєви, могла бы се интегралити и дала бы тако r поредъ некогъ броя произвольны сталника'.

Ове сталнике можемо себи представити тако опредељне, да и одъ одкривены чланова у dV сви они одпадаю, кои су снабдевени са dw_a, dw_b, $\frac{ddw}{du_a}$, $\frac{ddw}{du_b}$, ..., дакле тако, да сачинитељ тій чланова ставимо $=0$, и те єдначине употребимо за опредељиванје функціє r.

Пошто се пакъ тада у dV само іошъ произвольно dv налази, то ће се изъ єдначине $dV=0$ добыти поредъ граничны єдначина (како испадну) као обшта єдначина

$$4)\quad \frac{d(U+rW)}{dv} - \frac{d\left[\frac{d(U+sW)}{dv_1}\right.}{du} + \ldots = 0,$$

и єдначине 2., 3. и 4. єсу три диференціалне єдначине по v, w и r, кое интегралње даю ове функціє одъ u заједно съ увлачећимъ се сталницима.

Найпосле ове сталнике налазимо изъ свію осталы єдначина', пошто се у њима узму место u границе b и a.

§ 207.

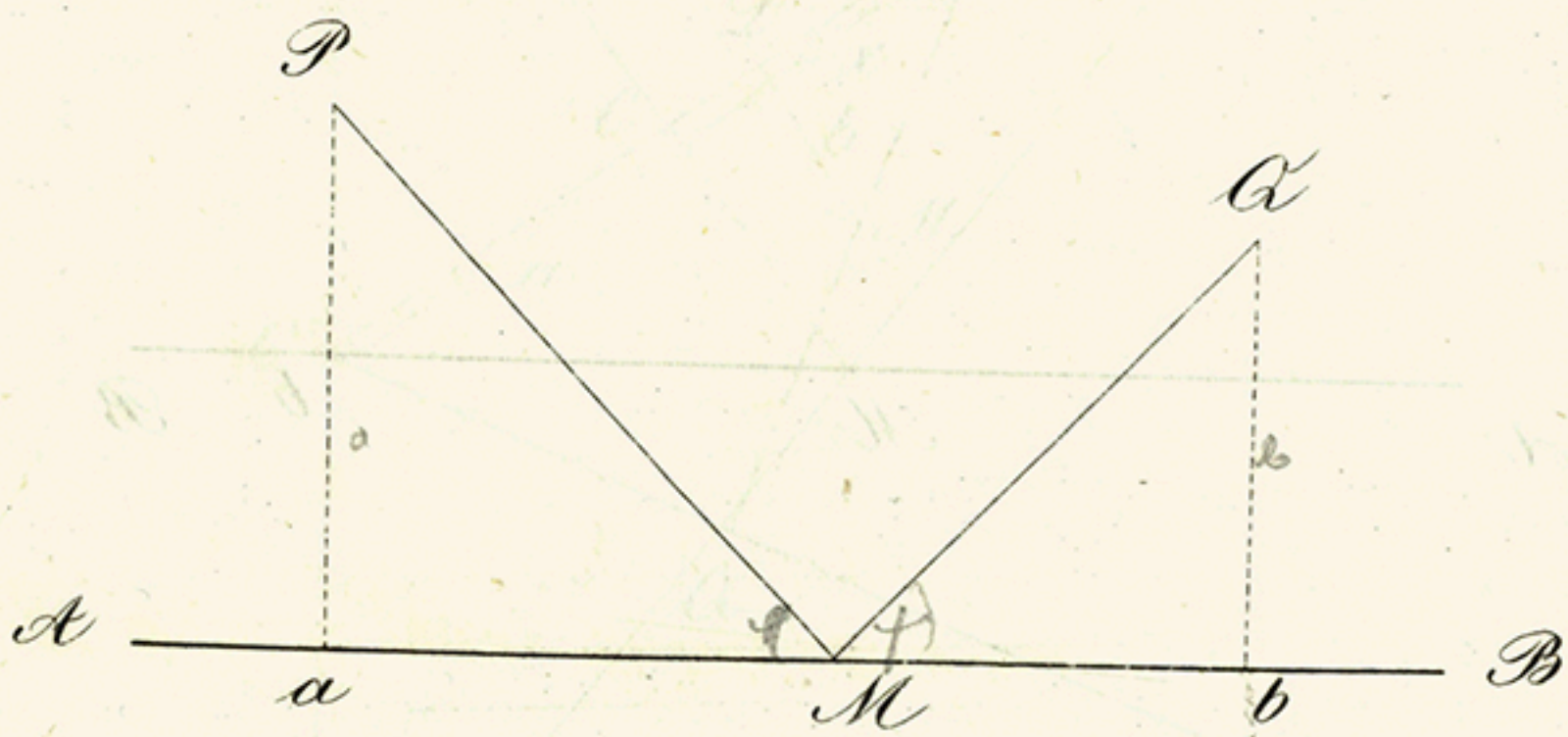
Овай описаный начинъ може се лако распростреti и на сложенів случаєве, гди V осимъ v и w садржи іошъ и друге променљивце y, z, ..., и гди су поредъ $W=0$ задате іошъ и друге условне єдначине $X=0$, $Y=0$, ... У такомъ случаю треба у dV узети $U+rW+sX+tY+\ldots$ место U.

Истый начинъ употребит'ћемо найпосле и у случаю, гди оближнје функціє одъ V треба да буду $V_x = \int_{a_x}^{b_x} U_x\,du$

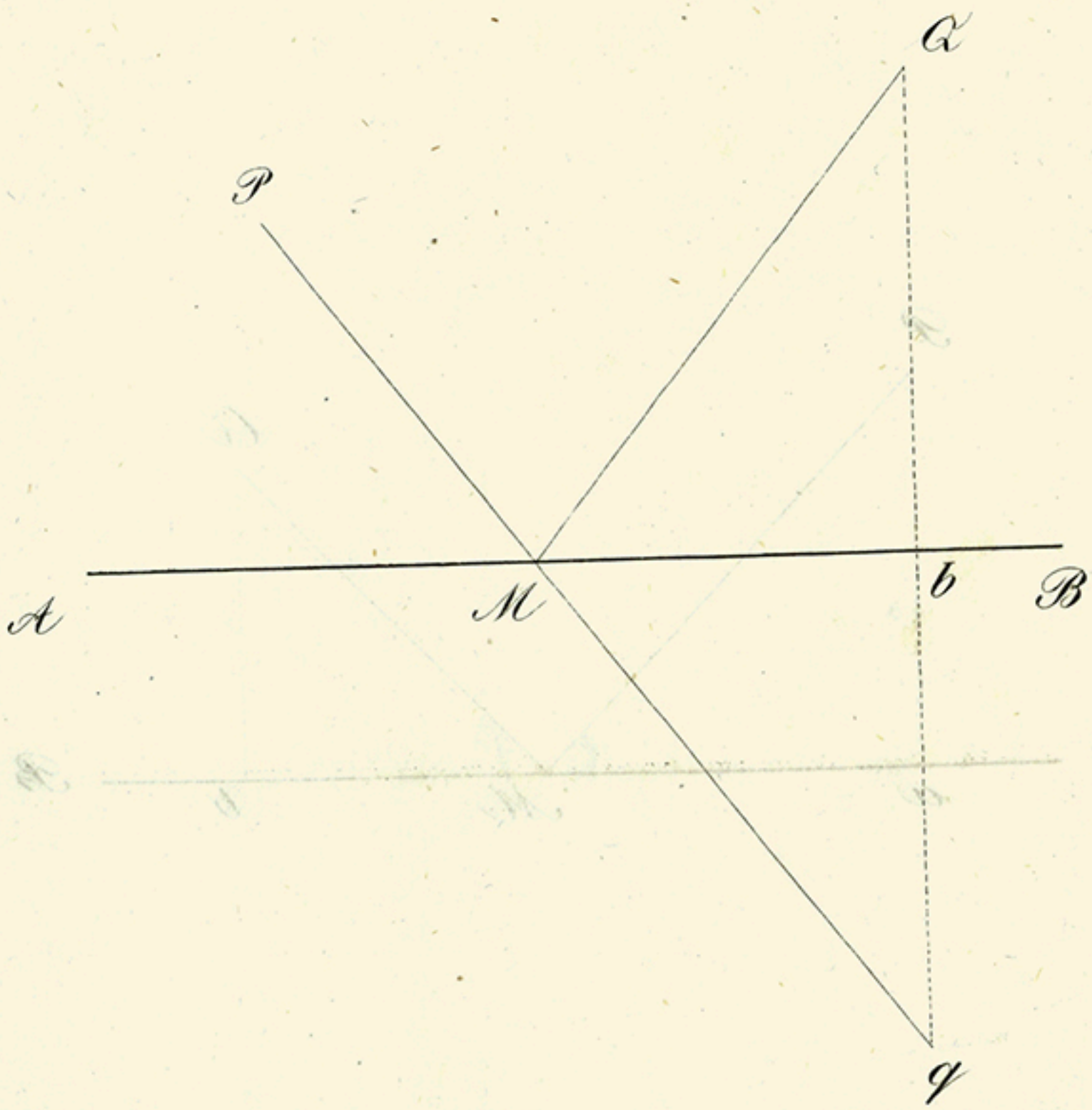
тако, да границе a и b нису задате, него се морају изнаћи такове, да V постане максимумъ или минимумъ.

Завршујући овай предметъ (и съ њимъ целу ову II. часть) примѣћавамо іошъ, да се сви они задатци зову **изопериметрійски**, гдигодъ V ніе основна функція него некій интегралъ, или е такова функція, у коіой се появлюе єданъ или више интеграла.

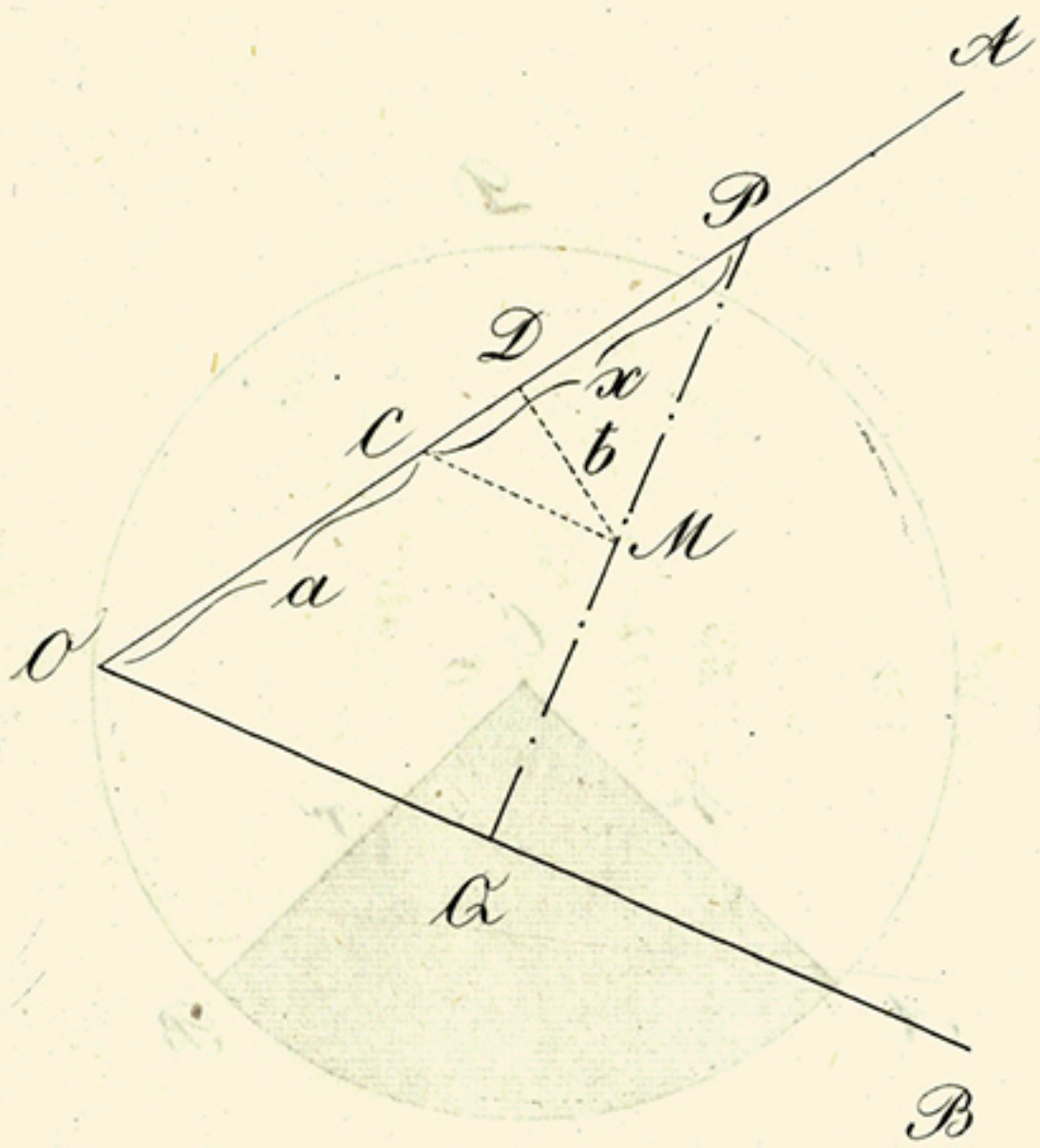
къ стран. 98.



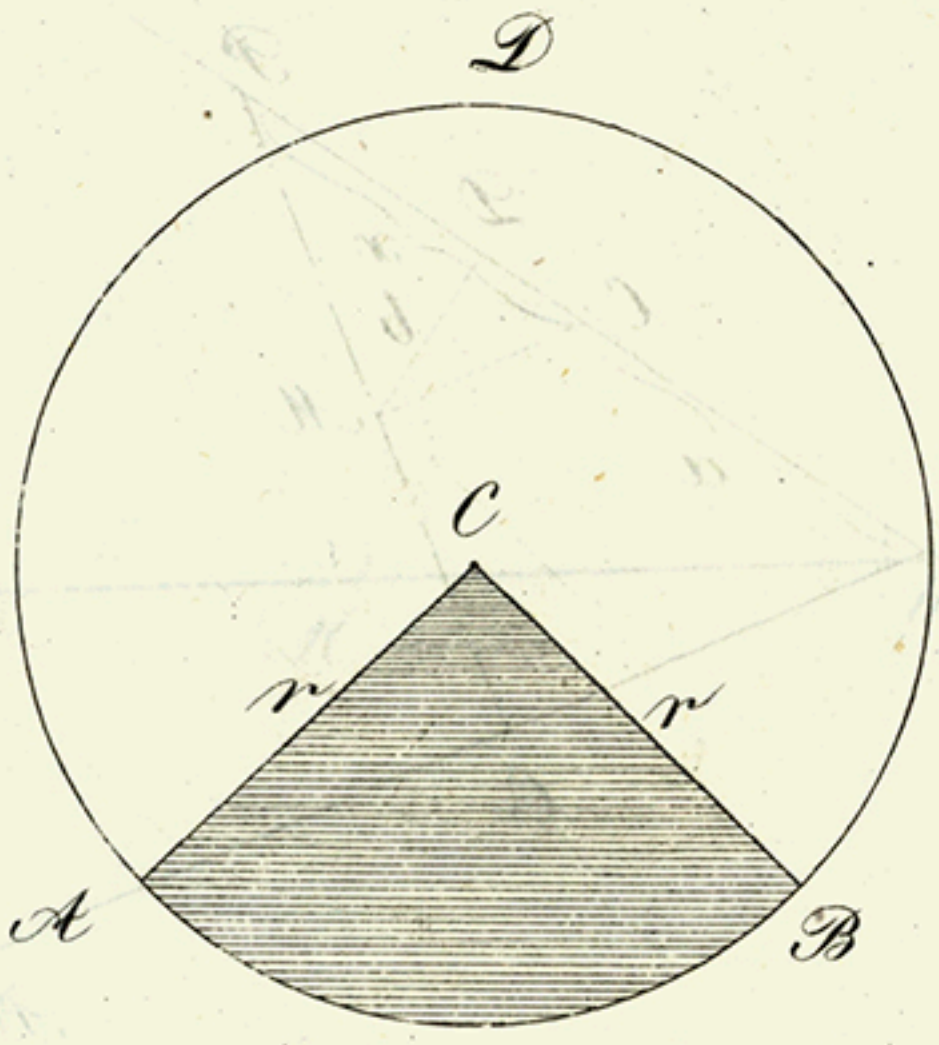
къ страни 99.



ke strani 100.



къ страни 101.





БИБЛИОТЕКА МАТИЦЕ СРПСКЕ
Р19Ср III 175/2.1