Глас CCXX. Одељење техничких наука Српске академије наука, књ. 3
Glas CCXX. Sections des Sciences techniques Académie serbe des Sciences, № 3

Народна библиотека у Београду
Бр. II 150080/7

Народна библиотека у Београду
Бр. 7

М. МИЛАНКОВИЋ

ВАВИЛОНСКИ ТОРАЊ МОДЕРНЕ ТЕХНИКЕ

(Приказано на скупу ОТН од 8 XII 1955)

У Старом завету, у првој књизи Мојсијевој, прича се како су потомци Нојеви, једини људи који су преживели катастрофу потопа, стигли у равницу Синеар и онде се настанили. И паде им на памет да сазидају торањ, висок до неба. Но када Бог виде шта чине, смути им језике да један другог не разумеде шта говори. И тако настаде разноликост језика на Земљи.

У бујној уобразиљи ове Мојсијеве приче има и нешто истине. Земља Синеар означава један крај старе вавилонске државе. Две хиљаде година пре наше ере главни град те државе био је Вавилон и средиште старо-ориенталне културе. Опасан дебелим градским зидом, имао је величанствене грађевине, а међу њима и оне висеће Семирамидине баште које су Грци убрајали у седам светских чуда. У томе граду уздизао се увис и вавилонски торањ, који је дао тему Мојсијевој причи. Почетком овога века пронађен је и откопан његов темељ квадратне основе са страницама дугим 91 метар. О висини тога торња немамо никаквих поузданих података, но, судећи по његовим темељима, мора да је био врло висок. Верује се да је имао степенаст облик од седам спратова, постављених један на други. И у другим местима Месопотамије нађени су остаци таквих високих степенастих торњева, званих цирукатима. Са њихових врхунаца посматрали су вавилонски свештеници небеске појаве и прибележавали резултате својих посматрања клинастим писмом, урезаним на плочице од иловаче. Те плочице лежале су вековима, заборављене и затрпане на местима старих вавилонских градова, сравњених са земљом. Тек почетком деветнаестог века почела се обраћати пажња тим документима древне прошлости, а научницима је пошло за руком да прочитају, разумеју и објаве садржај тих записа. Тада се увидело да су вавилонски свештеници својим посматрањима открили и забележили најважније појаве звезданога неба и кретања Сунца, Месеца и планета и тиме положили темеље нашој садашњој науци астрономије. Ако не својим торњем, они су својим духовним погледом

стигли у небеске висине. Вавилонски торањ оличава, дакле, једну велику идеју: тежњу ка небеским висинама.

Та тежња која је добила јачину жудње јасно је оличена и у готским црквама Средњега века. Њихови витки стубови, њихови уздигнути и зашиљени лукови, а поготово њихови витки торњеви јасно је испољавају. Неимари тих цркава изразили су је вековним напорима у величанственом облику. Наведимо о томе неколико примера. Највиши торањ од свих готских цркава има катедрала у Улму; висок 161 метар. Започет је у четрнаестом, а завршен у деветнаестом веку. Торњеви цркве у Келну имају висину од 157 метара; започети су 1243, а завршени 1880 године. Стефанов торањ бечке катедрале има висину од 137 метара; започет је 1365, а довршен 1433 године.

Та висинска достигнућа премашена су тек крајем деветнаестог века када је француски инжењер Ефел подигао за париску изложбу 1889 године свој торањ сазидан од жељеза, а висок 300 метара. Од онога доба висина тога торња наткриљена је америчанским облакодерима.

Овде ћу да поставим и решим ово питање: До које највеће висине и којим савременим средствима бисмо се могли попети увис грађевином која би надмашила све досадашње? На то питање даје нам наука и техника овај одговор.

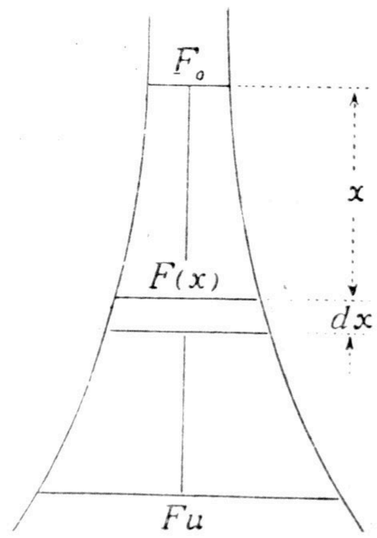
Наша савремена техника има два главна грађевинска материјала: гвожђе и бетон и њихову комбинацију остварену армираним бетоном. Грађевином сазиданом искључиво од гвожђа не би се могло постићи оно што бисмо, према напред реченом, желели. То показује пример Ефеловог торња. Његов гвоздени материјал подлежи рђи, а да би се од ње очувао, мора се с времена на време премазивати заштитним слојем. Но и тај слој подлежи кварy, зато ће дешава ово. Таман је премазивање торња довршено дугогодишњим радом, мора се почети изнова јер они делови његови који су били први премазани стигли су у такво стање да им је потребан понован заштитни слој. И зато се тај торањ стално премазује. Исти је случај и са великим гвозденим мостовима. Због тога гвоздене конструкције немају карактер монументалности. А и њихов материјал скупоцен је, и њихова монтажа компликована.

Сасвим је други случај са бетоном: старећи, постаје све чвршћи. То доказују испитивања која се од почетка овога века врше на материјалу бетонских мостова. Могло би се запитати да ли нам тај педесетогодишњи временски нитервал пружа довољну гаранцију и за дуже временске размаке. И на то питање имамо одговора. Једна од највеличанственијих грађевина старог Рима је Пантеон чија је градња започета за време императора Августа, а довршена за време владавине Хадријана у другом веку наше ере, стара, дакле, осамнаест векова. Она носи куполу која има пречник од 41,4 метра. Та купола начињена је од неке врсте бетона у којем је наш садашњи цемент замењен природном пуцоланском земљом. На њој се не показују никакви знаци старости.

Ето, то су разлози зашто ћу при решењу постављеног питања имати у виду грађевину сазидану од бетона. За такав подухват имам, као некадашњи инжењер, потребна теориска знања и практична искуства.

Изледа на први поглед да свака грађевина, од којег било материјала, има своју природну висинску границу која зависи од специфичне тежине и отпорности њеног материјала. Доњи слојеви те грађевине носе на себи сву њену тежину, а што је она виша, тим већем притиску подлеже ти слојеви. Кад тај притисак достигне дозвољено напрезање грађевинског материјала, грађевина је достигла своју могућу висину.

То би био случај када би грађевина имала облик вертикалне призме или ваљка. Но када би се она према доле проширивала, могло би се тако подесити да притисак њених хоризонталних пресека нигде не прекорачи дозвољено напрезање материјала. Најсавршенији облик такве грађевине био би тај у којем су сви њени хоризонтални пресеци једнако напрегнути до дозвољеног напрезања тако да је грађевински материјал у потпуности искоришћен.



Сл. 1

Такав случај предочен је, у његовом најједноставнијем облику, приложеном сликом која предочава стуб облика ротационог тела вертикалне осе. Означимо са $F(x)$ површину хоризонталног пресека стуба у отстојању x од једног другог пресека F_0 који лежи изнад њега, а са $G(x)$ тежину онога дела стуба који се налази између тих двају пресека. Означимо са k дозвољено напрезање употребљеног материјала; онда је саопштен захтев изражен једначином

$$\frac{G(x)}{F(x)} = k\,,$$

тј.

$$G(x) = k\,dF(x)\,.$$

Одатле следује

$$dG(x) = k\,dF(x)\,.$$

Означимо са g специфичну тежину употребљеног материјала; онда је

$$dG(x) = g\,F(x)\,dx\,.$$

Из предњих једначина следује

$$\frac{dF(x)}{F(x)} = \frac{g}{k}\,dx\,.$$

тј. пошто је за $x=0$ $F(x)=F_0$,

$$F(x) = F_0\, e^{\frac{g}{k}x} \tag{1}$$

Ова једначина даје нам облик грађевине полазећи од једног пресека F_0, идући од њега на доле. Њу ћемо скоро моћи употребити. Но размотримо и случај када полазимо од доле на горе. Задани пресек означимо са F_u, а произвољни који лежи изнад њега, а удаљен за x са $F(x)$. Онда је према пређашњем

$$F_u = F(x)\, e^{\frac{g}{k}x},$$

тј.

$$F(x) = F_u\, e^{-\frac{g}{k}x}. \tag{2}$$

Завиримо у структуру ових једначина да бисмо из њих иивукли неке консеквенције опште природе.

Као што је напред речено, g предочава специфичну тежину употребљеног грађевинског материјала израчунату по јединици запремине, тј. куба јединице дужине. k нам предочава дозвољено напрезање материјала израчунато по јединици површине, тј. квадрата јединице дужине. Јасно је дакле, да квоцијенат $\frac{k}{g}$ има димензију дужине. Означићемо га овако

$$\frac{k}{g} = \lambda, \tag{3}$$

и назватн га статичким параметром грађевинске конструкције. Тај параметар једнак је висини вертикалне призме која своју базу оптерећава напрезањем k.

Тако добивамо, место претходних, ове две једначине

$$F(x) = F_0\, e^{\frac{x}{\lambda}}, \tag{4}$$

$$F(x) = F_u\, e^{-\frac{x}{\lambda}}. \tag{5}$$

Одговоримо сада на питање до које висине се нашом грађевином можемо попети при задатој површини F_u њене базе и задатим статичким параметром λ.

Запремина наше грађевине, мерена од њене базе F_u па до висине x дата је изразом

$$V(x) = \int_0^x F(x)\,dx\,.$$

Зато је

$$V(x) = F_u \int_0^x e^{-\frac{x}{\lambda}}\,dx\,.$$

Извршимо ли ову квадратуру, добивамо

$$V(x) = \lambda\, F_u\,(1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}).$$

Када x тежи у бесконачност. добивамо

$$V(\infty) = \lambda\, F_u\,. \tag{6}$$

Запремина наше грађевине која се уздиже у висину до у бесконачност тежи једној коначној вредности која је јелнака површини бази F_u грађевине помножене статичким параметром λ.

У исто доба, док се грађевина уздиже у бесконачност, површина њених пресека тежи нули, пошто је, за $x=\infty$, $F(x)=0$.

Наша грађевина заоштрава се у шиљак, а затим у жицу, конац и паучину. Постајући све тања, она се губи у бесконачности.

Из саопштеног следује ово. Уочимо ли у нашој грађевини онај њен део који се изнад њеног произвољног пресека F_u уздиже у бесконачност, то је запремина тога дела једнака површини оног пресека помноженој дужином статичког параметра λ, дакле λF_u. Отстранимо ли од тога дела грађевине онај њен део који се од неког другог пресека F'_u, што лежи у произвољној висини изнад пресека F_u, уздиже у бесконачност, то је запремина његовог преосталог дела једнака

$$V = \lambda\,(F_u - F'_u)\,. \tag{7}$$

Тако смо добили једноставно правило за израчунавање запремине произвољног дела наше грађевине.

Сличан је случај са решењем и овог питања: Колики механички рад треба утрошити да се материјал грађевине подигне са њеног подножја и смести на одређено место? Одговор на ово питање добивамо овако.

Слој грађевине удаљен од подножја за дужину x а дебљине dx има тежину $g\,F(x)\,dx$. Да се подигне за висину x потребан је

елементаран рад $gx\,F(x)\,dx$. Целокупан рад утрошен за подизање грађевине базе F_u, а бесконачне висине, дат је интегралом

$$A = gF_u \int_0^\infty x\, e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

тј,

(8) $$A = g F_u \lambda^2$$

Овде нам $g F_u \lambda$ претставља тежину запремине призме грађевинског матаријала базе F_u, а висине λ, па је рад A једнак ономе који ваља утрошити да се та тежина дигне у вис за дужину λ.

За подизање грађевине која се налази између доњег слоја F_u и горњег слоја F_0 потребан је механички рад

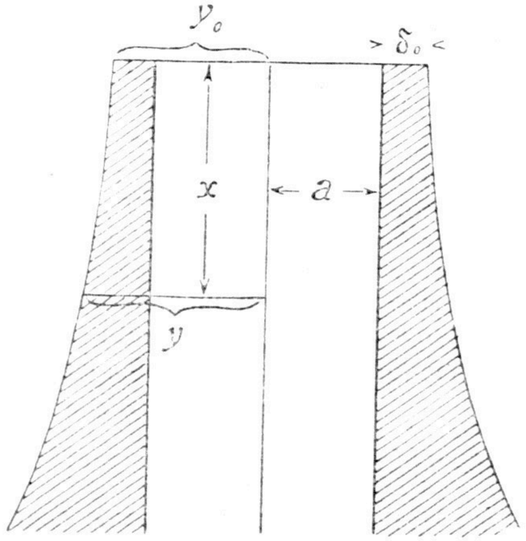
(9) $$A = g\,(F_u - F_0)\lambda^2,$$

тј.

$$A = g\,V\lambda.$$

А сада да пређемо на конкретан случај наше грађевине коју мислимо да пројектујемо.

Нашој грађевини нећемо дати облик пуног стуба, већ шупљег, са шупљином облика вертикалног кружног ваљка. Нека нам приложена слика предочава то стање ствари вертикалним пресеком кроз осу тага ваљка!



Сл. 2

Означимо са a полупречник базе кружног ваљка унутрашње шупљине грађевине о чијој ће изградњи бити касније говора. Отстојање хоризонталног пресека грађевине од њене горње ивице означимо са x, а са y отстојање спољње контуре тога пресека од осе ваљка. Дебљину прстенасте горње ивице грађевине означимо са δ_0. Онда имамо ово.

Површина хоризонталног пресека грађевине у отстојању x до њене горње површине дата је изразом

$$F(x) = \pi\,(y^2 - a^2),$$

$$F_0 = \pi\,(y_0^2 - a^2).$$

Стављајући ово у образац (1), добивамо

(10) $$y^2 = a^2 + (y_0^2 - a^2)\, e^{\frac{g}{k}x}.$$

После ових расуђивања ваља да се одлучимо колико широку да предвидимо унутрашњу шупљину зграде. Она има двојак задатак. Прво, да за време грађења омогући транспорт грађевног материјала увис и да омогући полагање оплате за ливени бетон од којега би грађевина била изведена. Та оплата, да бн се могла много пута употребити, била би начињена од гвожђа. Унутарња оплата моћи ће се без икакве промене употребити за време целога грађења. Чим је бетон којег довршеног слоја очврснуо, његова оплата ће се дићи увис за поновну употребу. То важи и за спољњу оплату но са том разликом што ће се она, са напредовањем грађевине, морати прекрајати, одузимајући појединим елементима оплате сувишне делове, пошто се она са висином сужује.

После довршене грађевине њена итутрашња шупљина има задатак да омогући саобраћај у згради и да прими њен унутарњи уређај.

Разлози економије потребних средстава за подизање грађевине којом желимо да се попнемо што више увис говоре да њена унутарња шупљина буде што тешња, но довољна за њену намену. Полупречник њеног хоризонталног пресека, онај што смо га у нашој слици означили са a, одговарао би постављеним условима, кад би смо му дали дужину од десет метара. Зато ставимо

$$a = 10 \text{ m}.$$

Ваља још да се одлучимо коју дебљину да дадемо прстенастом зиду наше грађевине на њеном горњем врху. Та дебљина означена је у нашој слици са δ_0. Из разлога економије она треба да је што мања, јер утиче и на остале димензије зграде, а треба да је довољна да са сигурношћу носи горњу платформу зграде која је њен најзначајнији део.

Та платформа са њеним оптерећењима треба да у горњој ивици зграде изазове дозвољено напрезање k, тако да би зграда свагде била напрегнута до дозвољене границе.

Постављеним захтевима одговарала би ова дебљина прстенастог плашта грађевине на њеном врху:

$$\delta_0 = 0{,}25 \text{ m}.$$

Та дебљина доста је филиграната, но, као што ћеме видети, довољна да носи оптерећење од 35.000 тона, На местима где је због притиска ветра потребна арматура, положиће се таква, а према правилима инжињерске статике. Како она не мења облик грађевине, нећемо се тим питањем овде бавити. Предострожности ради, биће добро горњи део прстенастог зида армирати.

Имамо још да се определимо које напрезање грађевинског матријала k ћемо дозволити и која специфична тежина g му одговара.

Зграду треба извести ливеним бетоном. Његову специфичну тежину можемо ставити једнаку 2.200 килограма по кубном метру, а дозволити му напрезање од 220 килограма по квадратном центиметру. Имамо, дакле,

$$g = 2.200 \text{ kg/m}^3, \qquad k = 2{,}200.000 \text{ kg/m}^2, \qquad \frac{k}{g} = 1.000 \text{ m},$$

$$\lambda = \frac{k}{g} = 1.000 \text{ m}.$$

Статички параметар ове конструкције мери, дакле, хиљаду метара. Како је, као што је већ речено,

$$a = 10 \text{ m}, \qquad y_0 + \delta_0 = 10{,}25 \text{ m},$$

то добивамо, место обрасца (10),

$$y^2 = 100 + (10{,}25^2 - 10^2)\, e^{0{,}001\, x},$$

тј.

(11) $$y^2 = 100 + 5{,}0625\, e^{0{,}001\, x},$$

при чему су x и y мерени у метрима.

При примени овог обрасца испољава се ово: када се x приближи износу од 13.000 метара, а поготово када је прекорачи, онда се у обрасцу (11) аденд 100 може занемарити поред оног што иза њега следује па добивамо

(12) $$y = 2{,}25\, e^{0{,}0005\, x}.$$

x	y	x	y
метри			
0	10,25	13 000	1 497
1 000	10,67	14 000	2 466
2 000	11,72	15 000	4 068
3 000	14,20	16 000	6 707
4 000	19,41	17 000	11 056
5 000	29,18	18 000	18 232
6 000	46,29	19 000	30 060
7 000	75,03	20 000	49 560
8 000	123,23	21 000	81 710
9 000	202,79	22 000	134 715
10 000	334,07	23 000	222 110
11 000	550,64	24 000	366 200
12 000	907,76	25 000	603 770

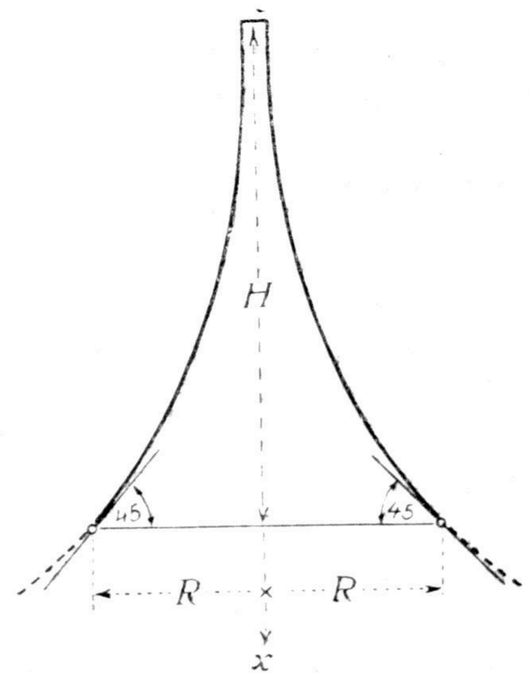
Служећи се саопштеним обрасцима добили смо претходну таблицу у којој је радиус y кружне контуре хоризонталних пресека грађевине дат као функција отстојања x од горње ивице грађевине.

Из те таблице видимо ово. Дебљина прстенастог зида грађевине, она којом y премаша дужину од 10 метара, расте, идући од горе на доле, спочетка доста споро. Док та дебљина на врхунцу зграде износи 25 центиметара, она се после 1000 метара висинског отстојања попела тек на 67 центиметара, тако да је тај горњи километар зграде витак и филигранаст. Код 2000 метара од врхунца зграде та дебљина је порасла на 1,72 m, код 5000 метара на 19,18 m, код 8000 метара прекорачила је стотину, изнад 12000 иде у хиљаде да би код 25000 висинског отстојања прекорачила износ од 600.000 метара.

Разуме се да са таквим наглим прираштајем дебљине зида изградња оваковог торња има својих граница. И зато се поставља питање: До које висине можемо нашом грађевином стићи увис?

Ту постоје, као што ћемо видети, две границе, једна практична, а друга теориска, која има карактер непремостивости.

Да испитамо та два случаја! Из саопштене таблице видимо да се у наглом прираштају радиуса хоризонталног пресека грађевине мора налазити једна одређена висина која је нарочито карактеристична. То је она на којој је нагиб спољног плашта грађевине једнак 45°. Тај случај предочен је приложеном сликом. Када, идући надоле, прекорачимо ту границу, онда њено подножје иде више у ширину но у висину тако да се зида више у ширину но у висину, а та диспропорција постаје све већа што је зграда виша. На тој висини грађевина је достигла своју рационалну границу. Испитајмо када наступа тај случај!



Сл. 3

Вратимо се, стога, једначини (12), тј.

(12) $$y = 2{,}25\, e^{0{,}0005\, x}.$$

Тражимо ону тачку те криве у којој је нагиб танганте на тој кривој према оси x једнак 45°. Тада је

$$y' = 1\,.$$

Како је

$$y' = 0{,}0005 \times 2{,}25\, e^{0{,}0005\, x},$$

дакле

$$y' = 0{,}0005\, y + 1,$$

то је

$$y = 2000 \text{ m}.$$

Стављајући ово у једначину (12), добивамо

$$x = 13580 \text{ m}.$$

Практична граница наше врсте грађевине оличена је дакле торњем чија кружна база има радиус

$$R = 2000 \text{ m},$$

а чија је висина

$$H = 13580 \text{ m}.$$

Да се позабавимо мало и практичним извођењем овакве грађевине.

Кубатура бетона потребног за њено извођење дата је обрасцем

$$V = \lambda\,(F_u - F_u').$$

Како је у нашем случају

$$F_u = \pi\,(2000^2 - 10^2)\ \text{m}^2, \qquad F_u' = \pi\,(10{,}25^2 - 10^2)\ \text{m}^2,$$

$$\lambda = 1000 \text{ m},$$

то добивамо

$$V = 12{,}566{,}000.000\ \text{m}^3 = 12{,}566\ \text{km}^3.$$

Ова запремина оличена је коцком која има дужину ивице:

$$a = 2325 \text{ m}.$$

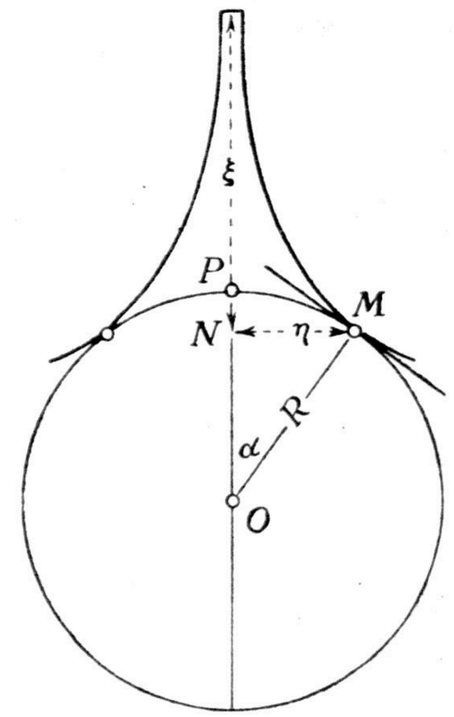
До сада нисмо говорили о унутарњој изградњи грађевине, о њеној шупљини кружне базе полупречника од 10 метара, а висине од 13580 метара. Разуме се да ће се она расчланити у поједине спратове. Приземљу, у којем ће бити смештене инсталације за дизалице, вентилацију и разни остали механички уређај, даћемо висину, укључујући у њу и дебљину таваниче, од 20 метара, а осталим спратовима, од патоса до патоса висину од 10 метара. Тако ћемо имати изнад приземља свега 1356 спратова. Основа сваког таквог спрата износи $100\,\pi = 314$ m². Одбијемо ли 14 m² као прорез за дизалице и степенице, добијамо за све спратове округло 400.000 m² корисног простора. То претставља простор за велико насеље.

При димензионирању зида наше грађевине нисмо водили рачуна о његовом оптерећењу овим многобројним таваницама и њиховог мобилног терета. Потребно је да и томе питању поклонимо своју пажњу.

Горња ивица наше грађевине, прстенаста површина од 15,90 m², може, да би сви хоризонтални пресеци грађевине били изложени дозвољеном притиску, бити оптерећена са 220 килограма по квадратном центиметру, или 2200 тона по квадратном метру. Због тога може грађевина, сем властите тежине свога обимног зида, да буде оптерећена са $15{,}90 \times 2200$ тона. тј. тежином од 35000 тона. Испитајмо то стање ствари!

Горња ивица наше грађевине носиће широку платформу. Она је најважнији део грађевине, јер служи за узлетиште и силазиште хеликоптера и за метеоролошку и астрономску опсерваторију. Потребно је дати јој што веће пространство. Предвиђамо јој кружну основу са пречником од 40 метара. Зато је њена површина 1256 m². Ставимо ли њену властиту тежину и њено мобилно оптерећење једнако 2,5 тоне по квадратном метру, то она оптерећује грађевину теретом од 3140 тона.

Међуспратне таванице имају свака површину 314 m². Ставимо ли за властиту тежину и мобилно оптерећење једну тону по квадратном метру, то налазимо да је споменута резерва од 35000 тона исцрпљена оптерећењем платформе и 101 међуспратних таваница. Та платформа и та таваница испуњавају горњи део зграде у висини од преко хиљаду метара. Силазимо ли још ниже, то наредне таванице оптерећују обимни зид преко његовог дозвољеног напрезања. Да израчунамо колики је тај вишак на отстојању од 1000 од врхунца зграде! Ту је радиус спољнег круга хоризонталног пресека зграде, према саопштеној таблици, једнак 10,67 m, а радиус унутрашњег круга 10 m. Дакле тај пресек има површину од 43,511 m². Зато оптерећење таваницом изазива притисак од $314 : 43{,}511 = 7{,}214$ тоне по квадратном метру, или 0,721 килограма по квадратном центиметру. Он је тако мален да се тај вишак може дозволити. У доњим слојевима зграде, где дебљина зида постаје огромна, то прекорачење исчезава сасвим.



Сл. 4

А сада да приступимо најинтересантнијем питању ове расправе: Која је највећа висина до које се грађевином ове врсте можемо попети изнад површине наше Земље?

Приложена слика показује нам и тумачи тај случај. Када нашој грађевини дадемо такву висину да њен плашт додирује Земљину површину, онда не можемо њом поћи још више увис, јер она губи свој ослонац. Израчунајмо када наступа тај случај!

За меридијански пресек плашта имали смо једначину (12), тј.

$$y = 2{,}25\ e^{0{,}0005\,x}$$

где су координате x и y мерене метрима. Како ћемо имати посла са великим бројевима, мерићемо те координате километрима и обележити их са ξ и η. Тиме се првобитне бројне мере тих координата смањују на хиљадити део, па ваља ставити $x = 1000\ \xi$; $y = 1000\ \eta$.

Тако добивамо

$$\eta = 0{,}00225\ e^{0{,}5\,\xi}. \tag{13}$$

Одатле следује да је извод од η по ξ

$$\eta' = 0{,}5\ \eta. \tag{14}$$

Дужина нормале меридијанског пресека у произвољној тачки криве (13) а у одабраном координатном систему дата је обрасцем

$$\eta \sqrt{1 + \eta'^2},$$

а она треба, као што се види из слике, да буде једнака радиусу Земљине лопте који ћемо означити са R. Зато је

$$\eta \sqrt{1 + \eta'^2} = R,$$

тј.

$$\eta^2 (1 + \eta'^2) = R^2,$$

или према претходним обрасцима

$$\eta^2 (1 + 0{,}25\ \eta^2) = R^2,$$

$$\eta^4 + 4\ \eta^2 = 4\ R^2,$$

$$(\eta^2 + 2)^2 = 4\ (R^2 + 1).$$

Како овде можемо јединицу поред квадрата Земљиног радиуса занемарити, то добивамо

$$\eta^2 = 2\ (R - 1).$$

Средњи радиус Земљине лопте мери 6368 километара, а радиус кривине Земљиног меридијана на географској ширини од 45^0 мери 6367 километара. Служећи се овим другим податком, добивамо

$$\eta = 112{,}84\ \text{km},$$

а онда следује из једначине (13)

$$\xi = 21{,}646\ \text{km}.$$

Израчунајмо још лучно отстојање α тачке M од тачке P!

Како је

$$\sin \alpha = \frac{\eta}{R},$$

то добивамо

$$\alpha = 1^0\ 0'\ 47''.$$

Узвишење тачке P од тачке N дато је изразом

$$\Delta = R\ (1 - \cos \alpha),$$

па добивамо

$$\Delta = 1.4\ \text{km},$$

База наше грађевине има површину

$$F_u = \pi\ \eta^2$$

тако да добимо

$$F_u = 40.000\ \text{km}^2.$$

Тако долазимо до овог коначног резултата.

Нашим техничким средствима можемо, као највишу, саградити од бетона грађевину која има базу радиуса од 112,84 km, а висину од 21,646 km.

Површина њене базе мери 40.000 km². У ту базу задире површина наше Земље за 1,4 km. Тако стварно узвишење изнад површине наше Земље износи

20,25 километара.

Ту висину нисмо у стању да прекорачимо. Грађевинска статика зауставља нас на тој непремостивој граници.

M. MILANKOVITCH

DER BABYLONISCHE TURM DER MODERNEN TECHNIK

Inhaltsangabe

(Angenommen 7 XII 1955)

Nachdem er einen Rückblick über die bisher erzielten Höhen der Bauwerke geworfen hat, stellt der Verfasser die Frage auf, bis zu welcher Höhe man mit den Mitteln der modernen Technik ein Bauwerk errichten könnte und beantwortet diese Frage mit dem Entwurf eines Betonturmes, sich dabei auf seine Kenntnisse und Erfahrungen stützend, die er einst als praktischer Ingenieur in Wien erworben hat. Dem Bauwerk soll eine derartige Form gegeben werden, dass es in allen seinen Teilen bis zu dem zulässigen Druck beansprucht werde, also einen Körper gleichen Widerstandes darstelle. Auch soll dasselbe einer praktischen Benützung dienen und an seinem oberen Ende eine breite Plattform tragen können, die zum

Abflug und Landung der Flugzeuge dienen und auch ein astronomisches Observatorium tragen könne. Die zweite Figur im Originaltexte stellt den vertikalen Querschnitt durch den oberen Teil des Turmes dar. Aus derselben ersieht man, dass des Hohlraum des Turmes ein vertikalen Zylinder ist mit dem Halbmesser seines horizontalen Querschnitts $a = 10\ m$, während die Wandung eine Dicke $\delta_0 = 0{,}25\ m$ aufweist. Der Halbmesser des horizontalen Querschnittes des äusseren Umhüllungsmantels des Bauwerkes, der in der erwähnten Figur mit y bezeichnet ist, nimmt, wie in der numerischen Tabelle des Originaltextes angegeben, mit der Entsernung von der Oberkante des Bauwerks zuerst sehr langsam, dann aber immer rascher zu. Bei einer Höhe des Bauwerks von 13580 m weist der Halbmesser seiner äussersten Wandung eine Länge von 2000 m auf. Die soeben erwähnte Höhe stellt die praktisch erreichbare Höhe eines solchen Bauwerkes dar, denn hat man diese Höhe überschritten, so ist die Böschung der äusseren Wandung, wie in der dritten Figur des Originaltextes dargestellt, geringer als 45^0, so dass man von da ab mehr in die Breite als in die Höhe bauen müsste. Bei einer Höhe des Bauwerkes von 21250 m ist selbst die denkbare Höhe des Bauwerkes erreicht, weil in diesem Falle, wie in der vierten Figur des Originaltextes veranschaulicht, sein Umhüllungsmantel bei einem Halbmesser des horizontalen Querschnittes von 112.84 Kilometer die Erdkugel berührt und die Basis des Bauwerks nicht weiter vergrössert werden kann, ebensowenig seine Höhe.

6995/56

Народна библиотека у Београду Бр. II 150080/8

Глас САН, CCXXI — Одељење природно-математичких наука књ. 9.
Glas de l'Académie Serbe des Sciences, № CCXXI
Classe des Sciences mathématiques et naturelles, № 9.

Народна библиотека у Београду Бр 8

ЂОРЂЕ МУШИЦКИ

НАРОДНА БИБЛИОТЕКА Београд

ПРИМЕНА PFAFF-ова ПРИНЦИПА У КВАНТНОЈ МЕХАНИЦИ

(Примљено на VII скупу Одељења природно-математичких наука од 30-X-1953 г.)

САДРЖАЈ

Аутор показује да се Schrödinger-ова једначина за стационарна стања може извести из Pfaff-ова принципа у облику у коме га је формулисао Билимовић. У том циљу полази се од израза за кинетичку и потенцијалну енергију таласа материје. У посматраном случају Pfaff-ов принцип је еквивалентан принципу минимума енергије.

У В О Д

Проф. Билимовић и Анђелић у низу својих радова поставили су један општи принцип Механике на бази Pfaff-ове методе, тзв. Pfaff-ов принцип, и показали су како се из њега могу извести једначине кретања, како у Механици чврстог тела, тако и у Механици непрекидних средина. При томе се једначине кретања добијају из елемента дејства у Hamilton-ову смислу, који се трансформише на линеарну форму и узима за Pfaff-ов израз. Pfaff-ов принцип је уствари диференцијални принцип, који одговара Hamilton-ову интегралном принципу. Овде је интересантно приметити да у трансформисаном елементу дејства фигуришу здружене каноничне променљиве, које подлежу Heisenberg-овој релацији неодређености, што несумњиво указује на дубљи смисао ових израза.

Питање принципа је од великог значаја за Теориску физику. Они омогућавају обухватање разних области физике у једну целину. Најопштији принцип је Hamilton-ов принцип, који обухвата знатан број физичких појава, почев од класичне Механике и Електромагнетизма до Теорије релативитета и Квантне механике. Стога је од интереса да ли се и Pfaff-ов принцип може проширити на Теориску физику и које појаве може обухватити. Овде треба приметити да се Pfaff-ов принцип, у облику у коме га је формулисао проф. Билимовић, може применити само на оне случајеве којима одговара дејство у Hamilton-ову смислу са једном независно променљивом. У случају више независно променљивих може се применити само на оне појаве које се узимањем

7193/56